

格子点の個数【類題】

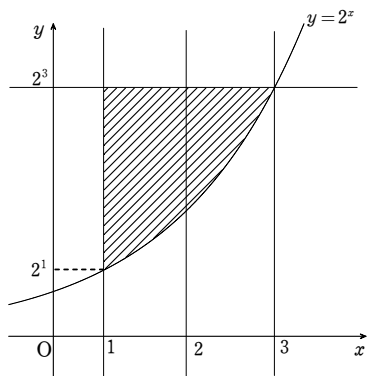
xy 平面上の点のうち、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。次の問いに答えよ。

- 領域 $\{(x, y) \mid 1 \leq x \text{ かつ } 2^x \leq y \leq 2^3\}$ に含まれる格子点の個数を求めよ。
- 領域 $\{(x, y) \mid 1 \leq x \text{ かつ } 2^x \leq y \leq 2^n\}$ に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし、 n は自然数である。

< '10 龍谷大 一部設問略 >

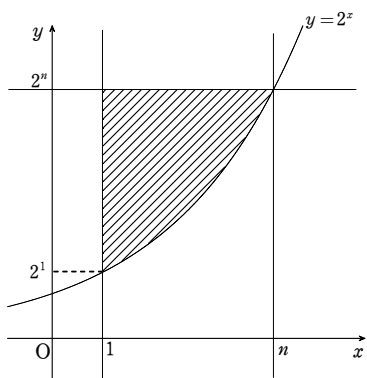
【戦略】

(1)



具体的な領域なのでたかが知れていますが、 $x=1$ 上、 $x=2$ 上、 $x=3$ 上の格子点を数え上げればよいでしょう。

(2)



という図になっただけで、大きくシナリオは変わりません。

$x=k$ ($k=1, 2, \dots, n$) 上の格子点を数えて Σ すればよいでしょう。

【解答】

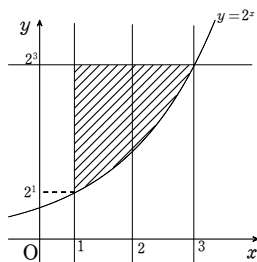
(1) 題意の領域に含まれる格子点は

$x=1$ 上には
 $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 8)$ の 7 個

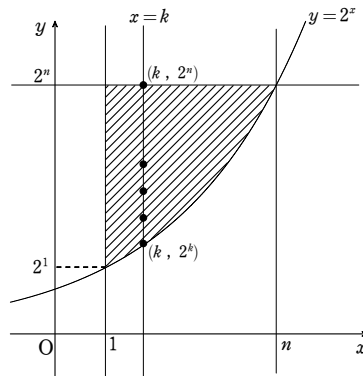
$x=2$ 上には
 $(2, 4), (2, 5), \dots, (2, 8)$ の 5 個

$x=3$ 上には $(3, 8)$ の 1 個

よって、 $7+5+1=13$ 【個】… 罫



(2)



題意の格子点のうち $x=k$ ($k=1, 2, \dots, n$) 上にあるものは

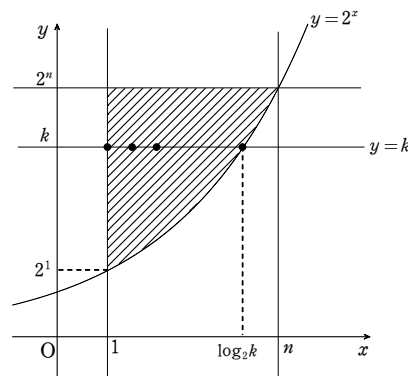
$$(k, 2^k), (k, 2^k+1), \dots, (k, 2^n)$$

の $2^n - 2^k + 1$ 個

求める格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2^n - 2^k + 1) &= (2^n + 1) \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n 2^k \\ &= n(2^n + 1) - \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \\ &= (n - 2) \cdot 2^n + n + 2 \text{【個】} \dots \text{罫} \end{aligned}$$

【総括】



横切りだと、 $y=k$ 上の格子点を $(1, k), (2, k), \dots$

としていったとき、最後の境界線上の点 $(\log_2 k, k)$ が格子点だったり格子点じゃなかったりということになり厄介です。