座標平面上で，点 $(x,\ y)$ を考える。ここで，x，y を 0 以上の整数，n を自然数とする。このとき，以下の個数を n で表せ。

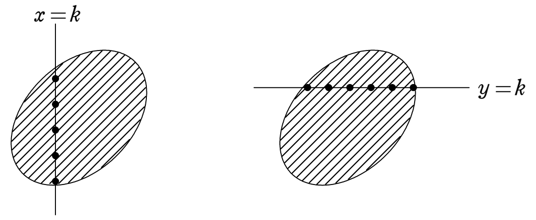
(1)　$x+y \leqq n$ を満たす点 $(x,\ y)$ の個数。

(2)　$\dfrac{x}{2}+y \leqq n$ を満たす点 $(x,\ y)$ の個数。

(3)　$x+\sqrt{y} \leqq n$ を満たす点 $(x,\ y)$ の個数。

＜ ’14 中央大 ＞

【戦略】



題意の領域を $x=k$ で切ったとき，$x=k$ 上に a_k 個の格子点があれば

$$\sum_{k=\bigcirc}^{\square} a_k$$

というように全て $\sum$ で足し合わせれば格子点の個数の総数が求まります。

あるいは $y=k$ という横切りでも同じ要領で求まります。

縦切りか横切りかの選択については当たり前ですが

数えやすい方

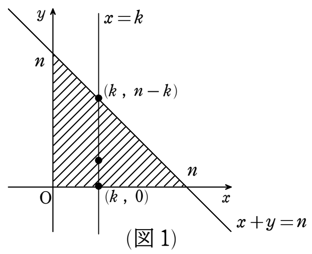
を選択します。

基本的には「格子点から格子点」であれば数えやすいでしょう。

【解答】

(1)　$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ x+y \leqq n \end{cases}$　を満たす $(x,\ y)$ の集合領域を図示すると以下の (図 1)

のようになる。



(図 1)

題意の格子点のうち，$x=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 上にあるものは

$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ \cdots,\ (k,\ n-k)$$

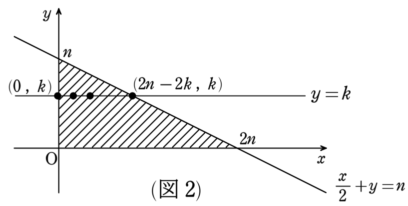
の $n-k+1$ 個

求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ 【個】\cdots 答$$

(2)　$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ \dfrac{x}{2}+y \leqq n \end{cases}$　を満たす $(x,\ y)$ の集合領域を図示すると以下の (図 2)

のようになる。



(図 2)

題意の格子点のうち，$y=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 上にあるものは

$$(0,\ k),\ (1,\ k),\ \cdots,\ (2n-2k,\ k)$$

の $2n-2k+1$ 個

求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=(2n+1)+(2n-1)+\cdots+5+3+1$$
$$=\sum_{m=1}^{n+1}(2m-1)$$
$$=2\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}-(n+1)$$
$$=(n+1)^2\ 【個】\cdots 答$$

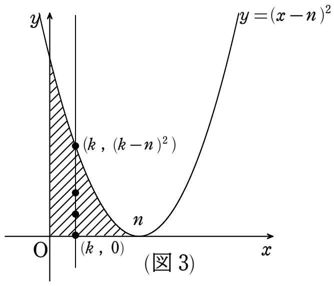
(3)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ において $x+\sqrt{y} \leqq n$ を満たす (x, y) は

$\sqrt{y} \leqq n-x$ …①，すなわち $y \leqq (x-n)^2$ を満たしている。

また，① を満たす y が存在するためには $x \leqq n$ であることが必要。

以上に注意して，$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ x+\sqrt{y} \leqq n \end{cases}$ を満たす (x, y) の集合領域を図示

すると以下の (図 3) のようになる。



(図 3)

題意の格子点のうち，$x=k$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 上にあるものは

$$(k, 0), (k, 1), \cdots, (k, (k-n)^2)$$

の $(k-n)^2+1$ $(=(n-k)^2+1)$ 個

求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\{(n-k)^2+1\} &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)^2+\sum_{k=0}^{n}1 \\
&= \{n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2+0^2\}+(n+1) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1) \\
&= (n+1)\left\{\frac{n(2n+1)}{6}+1\right\} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6)}{6}
\end{aligned}$$

【個】… 答

【総括】

「 The 例題 」といった基本的な格子点の数え上げ問題です。

格子点を数え上げる流れと，その後の $\sum$ 計算の処理についてしっかりと確認しましょう。