xy 平面上に放物線 $y=x^2$ がある。t を正の実数とし，放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{P}(-1,1)$，$\mathrm{Q}(t,t^2)$ をとる。3 点 O，P，Q を通る円を C とする。

(1) 円 C の中心の座標を t を用いて表せ。

(2) 円 C と放物線 $y=x^2$ の共有点の個数が 3 個となるような t をすべて求めよ。

(3) t が正の実数全体を動くとき，円 C の半径の最小値を求めよ。

＜ '17 埼玉大 ＞

【戦略 1】

(1) **中心が訊かれているので，中心を (a,b) などとおきます。**

このとき，$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ という形で円 C が表せます。

まず，原点を通ることから $r^2=a^2+b^2$ を得ます。
（これは (3) で用いることが見えるでしょう。）

$(-1,1)$，(t,t^2) を通るという条件から

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=a^2+b^2\\(t-a)^2+(t^2-b)^2=a^2+b^2\end{cases}$$

という関係式を得ます。

この後は計算を頑張れば $\begin{cases}b=a+1\\2a+2bt=t+t^3\end{cases}$ というところまで整理することが出来ると思います。

a，b を t で表すのが目的ですから，あとはこれら 2 式を a，b についての連立方程式と見ればよいでしょう。

(2) **円 C が (t,t^2) を通るとして立てた**

$$(t-a)^2+(t^2-b)^2=a^2+b^2$$

は t についての 4 次方程式です。

$(-1,1)$ も通るよということを織り込んだ $b=a+1$ という関係式を代入して整理すると

$$t^4-(2a+1)t^2-2at=0$$

となります。

これは $t(t+1)(t^2-t-2a)=0$ と因数分解できます。
（この 4 次方程式から $t=0$，-1 が出てくるのは当然です。）

もちろん t の個数は C と放物線の共有点の個数とリンクします。

したがって，この t の 4 次方程式から 3 種類の値の解しか出てこないという状況であればいいわけです。

つまり，$t=0$，-1，α という 3 種類だとして，どれが 2 重解かを考えていけばよいことになります。

(3) **$r^2=a^2+b^2$（$=t$ についての 1 変数関数）なので，方針面で困ることはないはずです。**

最悪微分してもよいですが，置き換えると 2 次関数となります。

【解 1】

(1) 円 C の中心を (a,b)，半径を r とする。

このとき，円 C の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

と表せ，特に，原点を通ることから，$r^2=a^2+b^2$ …①

したがって，円 C の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

これが $(-1,1)$，(t,t^2) を通るので

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(1-b)^2=a^2+b^2\\(t-a)^2+(t^2-b)^2=a^2+b^2\end{cases}$$

これを整理すると $\begin{cases}b=a+1\\2at+2bt^2=t^2+t^4 \ \cdots(*)\end{cases}$

条件 $t>0$ より，$\begin{cases}b=a+1 \ \cdots ②\\2a+2bt=t+t^3\end{cases}$

これら 2 式から b を消去すると $2a+2(a+1)t=t+t^3$

$2(t+1)a=t(t+1)(t-1)$ で，条件 $t>0$ より，$t+1>0$

ゆえに，$a=\dfrac{t^2-t}{2}$ で，② より，$b=\dfrac{t^2-t}{2}+1\left(=\dfrac{t^2-t+2}{2}\right)$

求める円 C の中心の座標は $\left(\dfrac{t^2-t}{2},\ \dfrac{t^2-t+2}{2}\right)$ …答

(2) $(*)$ より，$t^4+(1-2b)t^2-2at=0$

② より，$t^4+\{1-2(a+1)\}t^2-2at=0$

$$t^4-(2a+1)t^2-2at=0$$

$$t\{t^3-(2a+1)t-2a\}=0$$

$$t(t+1)(t^2-t-2a)=0 \ \cdots (☆)$$

円 C と $y=x^2$ の共有点が 3 個とは，円 C と $y=x^2$ が O，P，Q 以外の共有点をもたないということであり，(☆) が

$$t=0,\ -1,\ \alpha$$

という 3 種類の値しか解にもたないということである。

どれが 2 重解かを考えると

(i) $t^2-t-2a=0$ が $t>0$ なる重解をもつ
(ii) $t^2-t-2a=0$ が $t=0$ と正の解をもつ
(iii) $t^2-t-2a=0$ が $t=-1$ と正の解をもつ。

のいずれかであればよい。

(i) のとき，$t^2-t-2a=0$ の判別式を D とする。

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2a)=8a+1$ で，$D=0$ より $a=-\dfrac{1}{8}$

このときの重解は $t=\dfrac{1}{2}$ で，(i) の状況を満たす。

(ii) のとき $-2a=0$，すなわち $a=0$

このとき，$t^2-t=0 \iff t(t-1)=0$ となり，$t=0$，1 となるため
(ii) の状況を満たす。

(iii) のとき $1+1-2a=0$，すなわち $a=1$

このとき $t^2-t-2=0 \iff (t-2)(t+1)=0$ となり，$t=-1$，2 となるため，(iii) の状況を満たす。

以上より，求める t の値は $t=\dfrac{1}{2}$，1，2 …答

(3) ① より，$r^2=a^2+b^2$

(1) の結果から
$$\begin{aligned} r^2&=\left(\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2-t}{2}+1\right)^2 \\ &=\frac{1}{2}(t^2-t)^2+(t^2-t)+1 \end{aligned}$$

$u=t^2-t$ とおくと
$$u=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\geqq-\frac{1}{4}\ \left(\text{等号成立は}\ t=\frac{1}{2}\ \text{のとき}\right)$$

$$\begin{aligned} r^2&=\frac{1}{2}u^2+u+1 \\ &=\frac{1}{2}(u+1)^2+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$u\geqq-1$ の範囲で，r^2 は単調増加だから，$u\geqq-\dfrac{1}{4}$ でも，r^2 は単調増加。

ゆえに，r^2 は $u=-\dfrac{1}{4}$，すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のときに最小値 $\dfrac{25}{32}$ をとる。

したがって，求める円 C の半径 r の最小値は
$$\frac{5}{4\sqrt{2}}\left(=\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)\cdots\text{答}$$

【戦略 2】

円を一般形 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ の形で設定すると，(2)，(3) の見通しがよくなります。

【解 2】

(1) 円 C が原点を通ることに注意すると
$$x^2+y^2+ax+by=0$$
と表せる。

これと，$y=x^2$ を連立すると，$x^2+x^4+ax+bx^2=0$

整理すると，$x\{x^3+(b+1)x+a\}=0$ …①

条件から，① は $x=0$，-1，t を解にもつ。

ゆえに，$\begin{cases} a-b-2=0 & \cdots② \\ t^3+(b+1)t+a=0 & \cdots③ \end{cases}$

② より，$a=b+2$ で，これを ③ に代入して
$$t^3+(b+1)t+b+2=0$$

これは $(t+1)(t^2-t+b+2)=0$ と因数分解できる。

条件 $t>0$ から $t+1\neq0$ であるため，$t^2-t+b+2=0$

よって，$b=-t^2+t-2$ で，このとき，② から $a=-t^2+t$

以上から，円 C の方程式は
$$x^2+y^2-(t^2-t)x-(t^2-t+2)y=0$$

これを変形すると
$$\left(x-\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t^2-t+2}{2}\right)^2=\left(\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2-t+2}{2}\right)^2$$

であり，円 C の中心の座標は
$$\left(\frac{t^2-t}{2},\ \frac{t^2-t+2}{2}\right)\cdots\text{答}$$

(2) $b+1=-t^2+t-1$，$a=-t^2+t$ なので，① は
$$x\{x^3-(t^2-t+1)x-(t^2-t)\}=0$$
$$x(x+1)(x^2-x-t^2+t)=0$$
$$x(x+1)(x-t)(x+t-1)=0$$

この 4 次方程式が $x=0$，-1，t という 3 種類の値を解としてもつときを考えることになる。

したがって，$x=-t+1$ という解が 0，-1，t のどれかと一致するということになるため
$$t=1,\ 2,\ \frac{1}{2}\ \cdots\text{答}$$

(3) 円 C の方程式は

$$\left(x-\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t^2-t+2}{2}\right)^2=\left(\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2-t+2}{2}\right)^2$$

より，円 C の半径を r とすると

$$\begin{aligned} r^2&=\left(\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2-t+2}{2}\right)^2 \\ &=\left(\frac{t^2-t}{2}\right)^2+\left(\frac{t^2-t}{2}+1\right)^2 \end{aligned}$$

（以下【解 1】に準じる）

【総括】

【解 1】の路線はどちらかと言うと放物線と円の式を連立してはいません。

自分自身は【解 2】の連立する方針が先に見えました。

(1) で中心が訊かれていたので，円の標準形

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

ベースで考える人が多いかなと思い，そちらを【解 1】としていますが

これだと $y=x^2$ と連立する気になれなかったです。