a，b は実数で $a>0$ とする。円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=ax^2+b$ の共有点の個数を m とおく。

(1)　$m=2$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

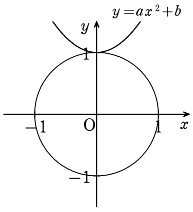
(2)　$m=3$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　$m=4$ となるための a，b に関する必要十分条件を求めよ。

＜ '15 大阪市立大学 ＞

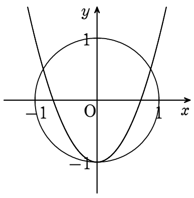
【戦略】

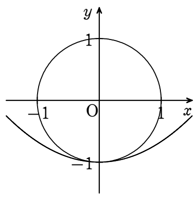
$b=1$ のときは



という状況で分かりやすいですね。

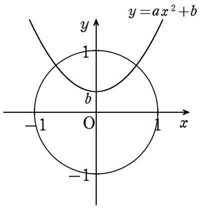
$b=-1$ のときも

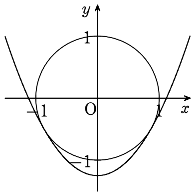




という状況で分かりやすいでしょう。(開き具合を表す a の値によってどちらの状況になるかが決まるわけです。それを (2) で考えるわけです。)

(1)　**$m=2$ となるのは**





となるときです。

$-1<b<1$ であれば，a の値に関わらず $m=2$ となりますが
$b<-1$ のときに何が言えればよいかを考える必要があります。

共有点の個数について考えるわけですから，

$x^2+y^2=1$ と $y=ax^2+b$ を連立させる

という方針でいくことになります。

次数を上げたくないという方針でいえば，$x^2=\dfrac{y-b}{a}$ と x^2 を消去する路線が考えられます。

そうすると，$\dfrac{y-b}{a}+y^2=1$，すなわち $ay^2+y-a-b=0$ ⋯(∗)
という y の 2 次方程式が得られます。

これが $-1<y<1$ の範囲内に重解をもてば $m=2$ となります。

(2)　**$b=-1$ となることは確定で，あとは (∗) が $ay^2+y-a+1=0$**
すなわち $(y+1)\{ay-(a-1)\}=0$ ですから $y=-1$ 以外の解 $y=\dfrac{a-1}{a}$ について $-1<\dfrac{a-1}{a}<1$ となればよいことになります。

(3)　**(∗) が $-1<y<1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもてばよいと言えばオッケーです。**

【解答】

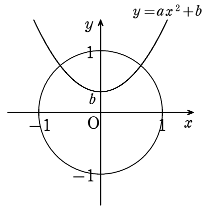
$x^2+y^2=1$ と，$y=ax^2+b$ を連立して x^2 を消去すると

$$\frac{y-b}{a}+y^2=1$$

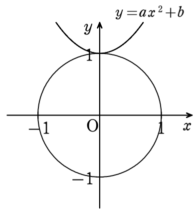
整理すると，$ay^2+y-a-b=0$ ⋯(∗)

(1)　$b>1$ のときは $m=0$ である。

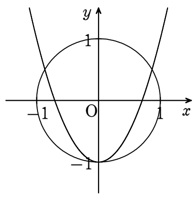
$-1<b<1$ であれば，a の値に関わらず
$m=2$ となる。

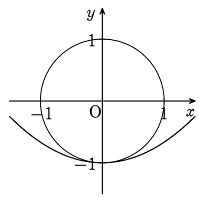


$b=1$ のとき，$m=1$ となる。



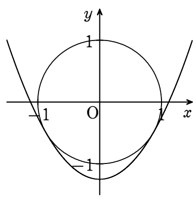
$b=-1$ のとき
$m=3$ または 1





$b<-1$ のとき $m=2$ となるためには

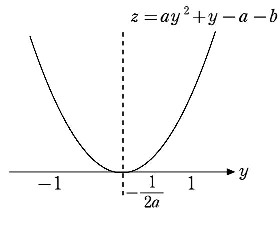
(∗) が $-1<y<1$ なる重解を
もてばよい



(∗) の判別式を D とすると，

$$D=1-4a(-a-b)$$
$$=4a^2+4ab+1$$

$D=0$ より，$4a^2+4ab+1=0$



条件 $a>0$ より $b=-a-\dfrac{1}{4a}$

軸について，$-1<-\dfrac{1}{2a}<1$ で，$a>0$ に注目すると，$a>\dfrac{1}{2}$ を得る。

つまり，$b=-a-\dfrac{1}{4a}$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$

この 2 つが成り立てば，

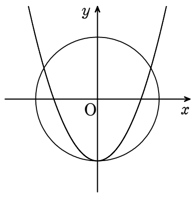
$$b+1=-a-\frac{1}{4a}+1$$
$$=\frac{-4a^2+4a-1}{4a}$$
$$=\frac{-(2a-1)^2}{4a}<0$$

より，$b<-1$ は自ずと成立する。

以上から，$m=2$ となるための a，b に関する必要十分条件は

「 $-1<b<1$ 」または「 $b=-a-\dfrac{1}{4a}$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$ 」⋯ 答

(2) $b=-1$ となることが必要。



このとき $(*)$ は

$ay^2+y-a+1=0$

$(y+1)\{ay-(a-1)\}=0$

$y=-1$ 以外の解は $y=\dfrac{a-1}{a}$

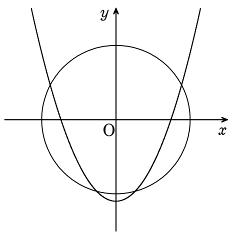
$-1<\dfrac{a-1}{a}<1$ となっていれば，$m=3$ となる。

$a>0$ に注意すると，$-a<a-1<a$，すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ を得る。

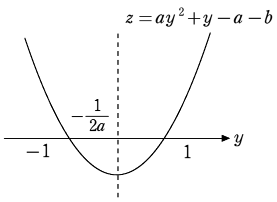
以上から，$m=3$ となるための a，b に関する必要十分条件は

$$b=-1 \text{ かつ } a>\frac{1}{2} \cdots \text{答}$$

(3) $(*)$ が $-1<y<1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもてばよい。



$f(y)=ay^2+y-a-b$ とおくと



$$\begin{cases} \text{軸について } -1<-\dfrac{1}{2a}<1 \\ \text{判別式について } D>0 \\ f(1)>0 \\ f(-1)>0 \end{cases}$$

で，これを整理すると

$$\begin{cases} a>\dfrac{1}{2} \\ b>-a-\dfrac{1}{4a} \\ b<-1 \end{cases}$$

すなわち，$-a-\dfrac{1}{4a}<b<-1$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$

以上より，$m=4$ となるための a，b に関する必要十分条件は

$$-a-\frac{1}{4a}<b<-1 \text{ かつ } a>\frac{1}{2} \cdots \text{答}$$

【戦略 2】

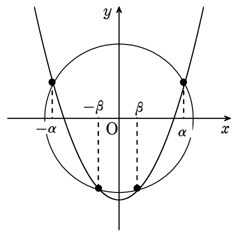
$x^2+y^2=1$，$y=ax^2+b$ から y を消去する方針も考えてみます。

そうなると，$x^2+(ax^2+b)^2=1$，すなわち

$$a^2x^4+(2ab+1)x^2+b^2-1=0$$

という 4 次方程式が登場します。

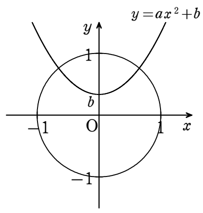
この 4 次方程式の解が何を意味するのかについては 4 つとも実数解というケースを考えるのが分かりやすいでしょう。



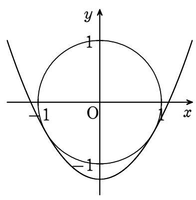
さらに，この 4 次方程式は「実質は」2 次方程式です。

一旦，「 x^2 」が求まり，$x=\pm\sqrt{}$ という形で対称性をもったような解の持ち方になります。

そうなると，



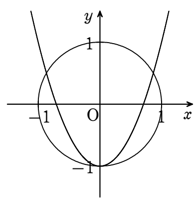
は，$x^2=$ 正，負 という解の持ち方です。



は，α，β が重なるイメージで

$a^2t^2+(2ab+1)t+b^2-1=0$ が正の重解をもつときを考えればよいことになります。

(2)



は，$x^2=0$，正 という解の持ち方をすることになります。

(3) むしろ 4 個の共有点をもつときがこの発想を支える源です。

$x^2=$ 正，正 という解の持ち方をすればよいことになります。

【解 2】 y を消去路線

$x^2+y^2=1$, $y=ax^2+b$ の 2 式から連立して y を消去すると

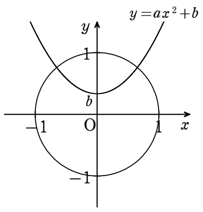
$$x^2+(ax^2+b)^2=1$$

整理すると $a^2x^4+(2ab+1)x^2+b^2-1=0$

$x^2=t$ とおくと , $a^2t^2+(2ab+1)t+b^2-1=0$ $\cdots(*)$

$f(t)=a^2t^2+(2ab+1)t+b^2-1$ とおく。

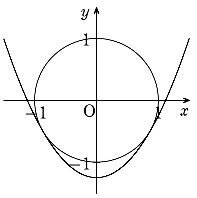
(1)



のときは $(*)$ が正の解と負の解を 1 つずつもてばよい。

ゆえに $a^2>0$ で $s=f(t)$ のグラフが下に凸の放物線であることに注意すれば , $f(0)<0$ となればよく , $b^2-1<0$

すなわち $-1<b<1$



のときは $(*)$ が正の重解をもてばよい。

$(*)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=(2ab+1)^2-4a^2(b^2-1)\\&=4a^2+4ab+1\end{aligned}$$

$D=0$ より , $4a^2+4ab+1=0$ $\cdots$①

このときの重解は $t=-\dfrac{2ab+1}{2a^2}$ なので , $-\dfrac{2ab+1}{2a^2}>0$

よって , $2ab+1<0$ $\cdots$②

① より $b=-a-\dfrac{1}{4a}$ で , これを ② に代入すると

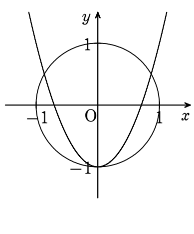
$2a\left(-a-\dfrac{1}{4a}\right)+1<0$ で整理すると , $a^2>\dfrac{1}{4}$

条件 $a>0$ より , $a>\dfrac{1}{2}$

以上から , $m=2$ となるための a , b に関する必要十分条件は

「 $-1<b<1$ 」または「 $b=-a-\dfrac{1}{4a}$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$ 」$\cdots$ 答

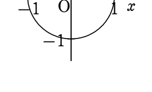
(2)



$(*)$ が $t=0$ と正の解をもてばよく ,
$f(0)=0$ より , $b^2-1=0$

ゆえに , $b=\pm1$

$b=1$ のときは



という状況を与えるので $b=-1$

このとき , $(*)$ は $a^2t^2-(2a-1)t=0$

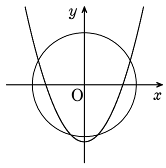
$t\{a^2t-(2a-1)\}=0$ で , $t=0$ 以外の解は $t=\dfrac{2a-1}{a^2}$

ゆえに , $(*)$ が正の解をもつとき , $\dfrac{2a-1}{a^2}>0$ となるため , $a>\dfrac{1}{2}$

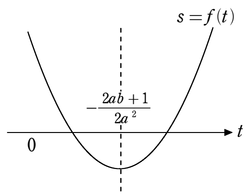
以上から , $m=3$ となるための a , b に関する必要十分条件は

$b=-1$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ 答

(3)



$(*)$ が正の解を 2 つもてばよい。



$$\begin{cases}\text{軸について } -\dfrac{2ab+1}{2a^2}>0\\ \text{判別式について } D>0\\ f(0)>0\end{cases}$$

各々整理すると $\begin{cases}2ab+1<0 \cdots③\\4a^2+4ab+1>0 \cdots④\\b^2-1>0 \cdots⑤\end{cases}$

④ より , $4ab>-4a^2-1$, すなわち $2ab>-2a^2-\dfrac{1}{2}$

ゆえに , $2ab+1>-2a^2+\dfrac{1}{2}$

③ も考えると , $-2a^2+\dfrac{1}{2}<2ab+1<0$ であるため ,

$-2a^2+\dfrac{1}{2}<0$, すなわち $a^2>\dfrac{1}{4}$

条件 $a>0$ を考えると $a>\dfrac{1}{2}$ $\cdots$(☆)

さて , ③ より , $b<-\dfrac{1}{2a}$

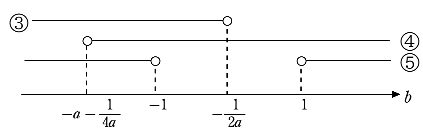
④ より , $b>-a-\dfrac{1}{4a}$

⑤ より , $b<-1$, $1<b$

ここで , (☆) に注意すると

$$\begin{cases}-1-\left(-a-\dfrac{1}{4a}\right)=\dfrac{4a^2-4a+1}{4a}=\dfrac{(2a-1)^2}{4a}>0\\ -\dfrac{1}{2a}-(-1)=\dfrac{2a-1}{2a}>0\end{cases}$$

ゆえに , $-a-\dfrac{1}{4a}<-1<-\dfrac{1}{2a}$ が成り立つ。



ゆえに , $m=4$ となるための a , b に関する必要十分条件は

$-a-\dfrac{1}{4a}<b<-1$ かつ $a>\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ 答

【総括】

放物線と円の共有点は結構ウルサイ議論になります。

直感的に処理できる部分と，式に教えてもらう部分の両方の要素があります。

今回は特に一般性の強い $y=ax^2+b$ という放物線が相手で，しかも必要十分条件を求めるという点で

「本当に抜けはないよな？」

と不安になる問題だと思います。（特に試験場では）

また，本問は色々教育的な要素を含んでいます。

簡単のため，$x^2+y^2=1$ と $y=x^2+b$ で考えます。

「$x^2+y^2=1$ と $y=x^2+b$ が接するときの b の値を求めよ。」

という問題を考えてみましょう。

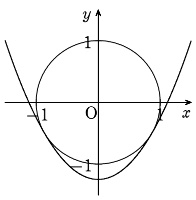
この 2 式を連立して x^2 を消去すると，$(y-b)+y^2=1$

すなわち，$y^2+y-b-1=0$

この判別式を D とすると，$D=1^2-4(-b-1)=4b+5$

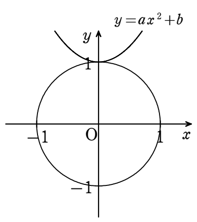
$D=0$ なので，$b=-\dfrac{5}{4}$ を得ます。

確かにこの時，



という状況は出てきます。

しかし，判別式が 0 とやったのに



という状況を与える $b=1$ は $D=0$ から登場しません。

なぜでしょうか？

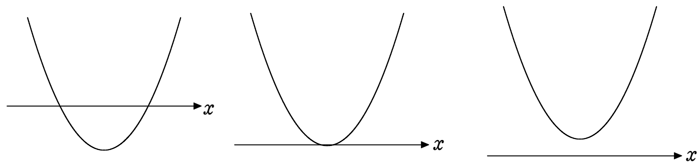
それを理解するためには「重解」というものを根本から考える必要があります。

【重解の根本的な部分】

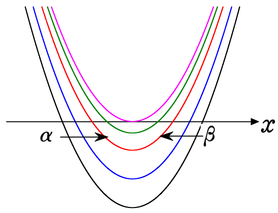
重解と最初に出会ったのは 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ の解の公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

の b^2-4ac を判別式 D と呼び，D の符号によって 2 次方程式がどのような解の持ち方をするかを判別できるということを学んだと思います。



この中で「重解」というものを学んだと思いますがイメージとしては



と解 α，β が近づいていき

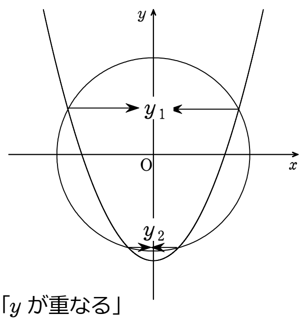
重なるというイメージです。

さて，先ほどの問題の話に戻ります。

連立して，x^2 を消去した $y^2+y-b-1=0$ という 2 次方程式の解は何を表しているでしょうか。

もちろんそれは

円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=ax^2+b$ の共有点の「y 座標」です。

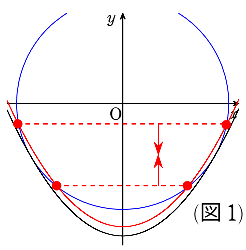


判別式 $D=0$ が与えるのは

「y の重解」であり，当たり前ですが「y が重なる」のです。（図の y_1，y_2 が重なる）

y が重なるギリギリの様子を描いてみれば

右の (図 1) のような状況です。



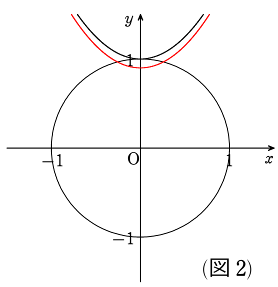
(図 1)

一方，(図 2) のように

接するギリギリの様子を描いてみると

この接し方は「y が重なった接し方ではない」ことが分かると思います

（どちらかと言うと x が重なっている）



(図 2)

したがって，「y が重解をもつ」

という $D=0$ から，$b=1$ の

シチュエーションは登場しないのです。