a を正の実数とする。

(1) 平面上の点 (x, y) は $x+y=a$, $x>0$, $y>0$ の範囲を動くものとする。このとき , $x\log x+y\log y$ の最小値を求めよ。

(2) 空間上の点 (x, y, z) は $x+y+z=a$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ の範囲を動くものとする。このとき , $x\log x+y\log y+z\log z$ の最小値を求めよ。

< '16 お茶の水女子大 >

【戦略】

(1) **従属 2 変数関数であり , $y=a-x$ と y を消去します。**

文字が消える際の「遺産の整理」という言葉に注意しましょう。

y は消えますが , $y>0$, すなわち $a-x>0$ であることから $0<x<a$ となります。

あとはこの範囲で $x\log x+(a-x)\log(a-x)$ という 1 変数関数の最小値を考えます。

微分して増減表をかけば , $x=\frac{a}{2}$ $\left(\text{このとき } y=\frac{a}{2}\right)$ で最小となることが分かります。

(2) **ひとまずは z を固定して , x , y のみを動かします。**

そうなってくると , $x+y=a-z$ ($=$固定値) という中で $x\log x+y\log y$ の部分を小さくしようと思うと $x=y=\frac{a-z}{2}$ とするのが最善だということが (1) から言えることになります。

つまり ,

$$x\log x+y\log y+z\log z \geqq (a-z)\log\frac{a-z}{2}+z\log z$$

ということになります。

ここからは $g(z)=(a-z)\log\frac{a-z}{2}+z\log z$ として , 固定していた z を動かし , $g(z)$ の最小を考えます。

【解答】

(1) $y=a-x$ であり , $y>0$ なので , $a-x>0$

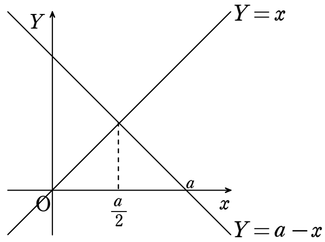
これより , $0<x<a$

$x\log x+y\log y=x\log x+(a-x)\log(a-x)$

$f(x)=x\log x+(a-x)\log(a-x)$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x)&=\log x+x\cdot\frac{1}{x}+(-1)\log(a-x)+(a-x)\cdot\frac{1}{a-x}\cdot(-1) \\ &=\log x-\log(a-x) \end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号は x と $a-x$ の値の大小によって決まる。



x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	(a)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

求める最小値は $f\left(\frac{a}{2}\right)=a\log\frac{a}{2}$ …答

(2) $x+y+z=a$, $x>0$, $y>0$, $z>0$ より

$$0<x<a,\ 0<y<a,\ 0<z<a$$

z を固定する。

$x+y=a-z$ であり , (1) の結果から

$$x\log x+y\log y+z\log z \geqq (a-z)\log\frac{a-z}{2}+z\log z$$

等号成立は $x=y=\frac{a-x}{2}$ のとき

z の固定を外す。

$$\begin{aligned} g(z)&=(a-z)\log\frac{a-z}{2}+z\log z \\ &=(a-z)\log(a-z)-(a-z)\log 2+z\log z \end{aligned}$$ とおく。

$$\begin{aligned} g'(z)&=-\log(a-z)+(a-z)\cdot\frac{-1}{a-z}+\log 2+\log z+z\cdot\frac{1}{z} \\ &=\log z-\log(a-z)+\log 2 \\ &=\log\frac{2z}{a-z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(z)&=\frac{1}{z}+\frac{1}{a-z} \\ &=\frac{a}{z(a-z)}>0 \end{aligned}$$

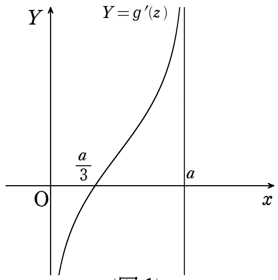
$g'(z)$ は $0<z<a$ で単調増加 …①

$$\lim_{z\to+0} g'(z) = -\infty \quad \cdots ②$$

$$\lim_{z\to a-0} g'(z) = \infty \quad \cdots ③$$

$$g'\left(\frac{a}{3}\right) = \log\frac{\frac{2a}{3}}{a-\frac{a}{3}}$$
$$= \log 1$$
$$= 0 \quad \cdots ④$$

①，②，③，④ より，$Y=g'(z)$ のグラフは (図 1) のようになる。



(図 1)

$g(z)$ の増減表は

z	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	(a)
$g'(z)$		$-$	0	$+$	
$g(z)$		↘		↗	

よって，

$$x\log x + y\log y + z\log z \geqq g(z) \geqq g\left(\frac{a}{3}\right) = a\log\frac{a}{3}$$

$$\therefore\ x\log x + y\log y + z\log z \geqq a\log\frac{a}{3}$$

等号成立は $x=y=\frac{a-z}{2}$ かつ $z=\frac{a}{3}$ ，すなわち

$$x=y=z=\frac{a}{3} \text{ のとき}$$

以上から求める最小値は $a\log\frac{a}{3}$ …答

【総括】

多変数関数の最大最小の基本は

従属 → 文字消去

独立 → 予選決勝法

です。

なお，本問の結果は

$x_k>0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ を満たしているとき

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\log x_k \geqq a\log\frac{a}{n}$$

が成立する。

と一般化できます。