x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ を正数とし，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k$$

を満たすとする。このとき不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log \frac{k}{n}$$

を証明せよ。

＜ '90 東京工業大 ＞

【戦略】

例題で

2 変数の場合 → 3 変数の場合

と拡張して考えました。

本問も同様に

n 変数の場合を仮定し，$n+1$ 変数の場合

を示す「数学的帰納法」という路線を選択します。

【解答】

正の数 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ に対して

$$x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \cdots + x_n \log x_n \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n) \log \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \cdots (*)$$

（等号成立は $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ のとき）

ということを n に関する数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = x_1 \log x_1$$
$$(*) \text{ の右辺} = x_1 \log x_1$$

で $(*)$ は成立する。

(ii)　$n=m$ $(m=1, 2, \cdots)$ のとき $(*)$ が成立すると仮定する。

このとき $x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}=k$ とおく。

$y = x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2 + \cdots + x_m \log x_m + x_{m+1} \log x_{m+1}$ について x_{m+1} を固定する。

このとき仮定から

$$y \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_m) \log \frac{x_1+x_2+\cdots x_m}{m} + x_{m+1} \log x_{m+1}$$

$$\begin{aligned} f(x_{m+1}) &= (k-x_{m+1}) \log \frac{k-x_{m+1}}{m} + x_{m+1} \log x_{m+1} \\ &= (k-x_{m+1}) \log (k-x_{m+1}) - (k-x_{m+1}) \log m + x_{m+1} \log x_{m+1} \end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned} f'(x_{m+1}) &= -\log(k-x_{m+1}) + (k-x_{m+1}) \cdot \frac{-1}{k-x_{m+1}} \\ &\qquad + \log m + \log x_{m+1} + x_{m+1} \cdot \frac{1}{x_{m+1}} \\ &= -\log(k-x_{m+1}) + \log m + \log x_{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_{m+1}) &= \frac{1}{k-x_{m+1}} + \frac{1}{x_{m+1}} \\ &= \frac{k}{x_{m+1}(k-x_{m+1})} \end{aligned}$$

$0 < x_{m+1} < k$ であるため，$f''(x_{m+1}) > 0$ であり，

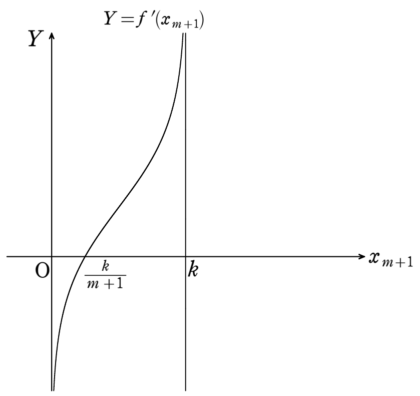
$f'(x_{m+1})$ は単調増加 …①

$$\lim_{x_{m+1} \to +0} f'(x_{m+1}) = -\infty \cdots ②$$

$$\lim_{x_{m+1} \to k-0} f'(x_{m+1}) = \infty \cdots ③$$

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{k}{m+1}\right) &= -\log\left(k - \frac{k}{m+1}\right) + \log m + \log \frac{k}{m+1} \\ &= -\log \frac{mk}{m+1} + \log m + \log \frac{k}{m+1} \\ &= \log \frac{m \cdot \frac{k}{m+1}}{\frac{mk}{m+1}} \\ &= \log 1 \\ &= 0 \cdots ④ \end{aligned}$$

①，②，③，④ より，$Y=f'(x_{m+1})$ のグラフは



のようになり，$f(x_{m+1})$ の増減表は

x_{m+1}	(0)	$\cdots$	$\dfrac{k}{m+1}$	$\cdots$	(k)
$f'(x_{m+1})$		$-$	0	$+$	
$f(x_{m+1})$		$\searrow$		$\nearrow$	

以上から

$$y \geqq f(x_{m+1}) \geqq f\left(\frac{k}{m+1}\right)$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{m+1}\right) &= \left(k-\frac{k}{m+1}\right)\log\left(k-\frac{k}{m+1}\right)-\left(k-\frac{k}{m+1}\right)\log m+\frac{k}{m+1}\log\frac{k}{m+1} \\
&= \frac{km}{m+1}\log\frac{km}{m+1}-\frac{km}{m+1}\log m+\frac{k}{m+1}\log\frac{k}{m+1} \\
&= \frac{km}{m+1}\left(\log\frac{k}{m+1}+\log m\right)-\frac{km}{m+1}\log m+\frac{k}{m+1}\log\frac{k}{m+1} \\
&= \frac{km}{m+1}\log\frac{k}{m+1}+\frac{k}{m+1}\log\frac{k}{m+1} \\
&= \frac{k(m+1)}{m+1}\log\frac{k}{m+1} \\
&= k\log\frac{k}{m+1} \\
&= (x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1})\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}}{m+1}
\end{aligned}$$

すなわち，$y \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1})\log\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}}{m+1}$

等号成立は $x_1=x_2=\cdots=x_m=\dfrac{k-x_{m+1}}{m}$ かつ $x_{m+1}=\dfrac{k}{m+1}$

すなわち，$x_1=x_2=\cdots=x_m=x_{m+1}=\dfrac{k}{m+1}$ のとき

以上から，$(*)$ は $n=m+1$ のときも成立する。

(i)，(ii) から，

正の数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して

$$x_1\log x_1+x_2\log x_2+\cdots+x_n\log x_n \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

（等号成立は $x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ のとき）

が成立することが示された。

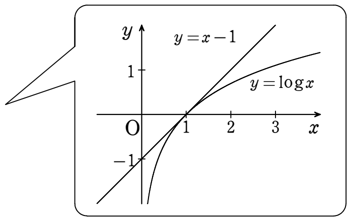
【戦略 2】

解く側からすれば「ズルい」と言われかねませんが

有名不等式

$$x-1 \geqq \log x \quad (x>0)$$

を利用することもできます。



【解 2】

$f(x)=(x-1)-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

ゆえに，$x>0$ において，$f(x) \geqq 0$，すなわち $x-1 \geqq \log x$ が成立する。

これにより，$\dfrac{1}{x}$（>0）に対してもこの不等式は成立し，

$$\frac{1}{x}-1 \geqq \log\frac{1}{x}$$

が成立するため，$\dfrac{1}{x}-1 \geqq -\log x$，すなわち

$$\log x \geqq 1-\frac{1}{x} \quad \cdots(☆)$$

を得る。

今，

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\right)-k\log\frac{k}{n} &= \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\log\frac{k}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i\left\{\log x_i-\log\frac{k}{n}\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i\log\frac{nx_i}{k} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

(☆) より，x_i（>0）に対して，$\log\dfrac{nx_i}{k} \geqq 1-\dfrac{1}{\frac{nx_i}{k}}=1-\dfrac{k}{nx_i}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}x_i\log\frac{nx_i}{k} &\geqq \sum_{i=1}^{n}x_i\left(1-\frac{k}{nx_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{k}{n}\cdot n \\
&= k-k \\
&= 0 \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

①，② から，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i \geqq k\log\frac{k}{n}$ が成立する。

【総括】

帰納法において

> $x_1+x_2+\cdots+x_m=k$ を満たす任意の $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ に対して
> $$\sum_{i=1}^{m} x_i\log x_i \geqq k\log\frac{k}{m}$$
> が成立すると仮定したとき
>
> $x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}=k$ を満たす任意の $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ x_{m+1})$
> に対して
> $$\sum_{i=1}^{m+1} x_i\log x_i \geqq k\log\frac{k}{m+1}$$
> の成立を目指す

ということになります。この際に

$n=m$ のときの $x_1\sim x_m$ と $n=m+1$ のときの $x_1\sim x_m$ は全然違うものだということを理解しておきましょう。

足して k となる任意の m 個の正の数 $x_1\sim x_m$

と

足して k となる任意の $m+1$ 個の正の数の中の $x_1\sim x_m$

は全然違うのです。

むしろ，このような混乱を生みかねないので，本問において「足して k 」というのはかえって邪魔です。

k という設定を用いずとも本問は

> 正の数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して
> $$\sum_{i=1}^{n} x_i\log x_i \geqq (x_1+x_2+\cdots+x_n)\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
> が成り立つことを証明せよ。

という問題文で事足りるわけです。

【参考】

$x_i\geqq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を満たすとき
$$-\sum_{i=1}^{n} x_i\log x_i \ (\text{ ただし } 0\log 0=0 \text{ と定める })$$
をエントロピーといい，物事の不可逆性の度合いを示す指標を表します。