△ABCにおいて，三辺の長さが AB＝AC＝2，BC＝x であるとき，次の問に答えよ。

(1) △ABCの内接円の半径を x を用いて表せ。

(2) △ABCの内接円の面積を最大にする x の値と，その最大値を求めよ。

＜ '07 青山学院大 ＞

【戦略】

(1) **内接円の半径と言えば，面積と絡めて導出する方法が有名ですが，文字が入ったままで △ABC の面積を出すのは少し躊躇われます。**

幾何的に相似を利用して題意の半径 r と x の関係を出す方向性で考えていきます。

三角形の成立条件 $x>0$ かつ $x<2+2$，すなわち $0<x<4 \cdots$ ① に注意して話を進めていきましょう。

(2) **r が x の式で表現されていることから，内接円の面積 πr^2 も x の式で表されます。**

ですから，方針面では迷いなく微分して増減表を書き，最大となるときをとらえます。

今回，$S=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{-x^3+4x^2}{x+4}$ ということで，$f(x)=\dfrac{-x^3+4x^2}{x+4}$ とでも設定し，微分します。

ゴリゴリ計算すれば，$f'(x)=\dfrac{2x(-x^2-4x+16)}{(x+4)^2}$ と得られます。

$f'(x)$ の符号は $0<x<4$ の範囲では $-x^2-4x+16$ の符号に一致します。

x	(0)	$\cdots$	$-2+2\sqrt{5}$	$\cdots$	(4)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	最大	↘	

という増減表を得ますが，

$$f(-2+2\sqrt{5})=\frac{-(-2+2\sqrt{5})^3+4(-2+2\sqrt{5})}{(-2+2\sqrt{5})+4}$$

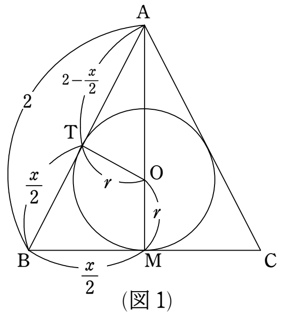
を計算するのが少し鬱陶しいです。

分数関数の極値は計算上工夫の余地があります。

それについては【解答】の中で注釈を入れる形で解説します。

なお，【解答】の中では，この工夫を施す関係で $f(x)$ ではなく，違うアルファベットで $h(x)$ と設定します。

【解答】



(図 1)

(1) (図 1) のように，接点 M，T を定め，△ABCの内接円の中心を O，半径を r とする。

各線分の長さは (図 1) のようになる。

三角形の成立条件から，$x>0$ かつ $x<2+2$

すなわち $0<x<4 \cdots$ ①

△AMB ∽ ATO なので，AM : AT＝MB : TO

よって，$\mathrm{AM} : 2-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2} : r$

これより，$r\,\mathrm{AM}=\dfrac{x}{2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)$，すなわち $\mathrm{AM}=\dfrac{1}{r}\left(x-\dfrac{x^2}{4}\right)$

直角三角形 AMB で三平方の定理から

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\mathrm{AM}^2=2^2$ で，$\mathrm{AM}^2=\left(2+\dfrac{x}{2}\right)\left(2-\dfrac{x}{2}\right)$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{4x-x^2}{4}\right)^2=\left(2+\frac{x}{2}\right)\left(2-\frac{x}{2}\right)$$

$$r^2=\frac{\dfrac{x^2(4-x)^2}{16}}{\left(2+\dfrac{x}{2}\right)\left(2-\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{x^2(4-x)^2}{16\left(4-\dfrac{x^2}{4}\right)}$$

$$=\frac{x^2(4-x)^2}{4(16-x^2)}$$

① より，

$$r=\frac{x(4-x)}{2\sqrt{16-x^2}}$$

$$=\frac{x(4-x)\sqrt{16-x^2}}{2(16-x^2)}$$

$$=\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2(4+x)} \cdots \text{答}$$

(2)　△ABCの内接円の面積を S とする。

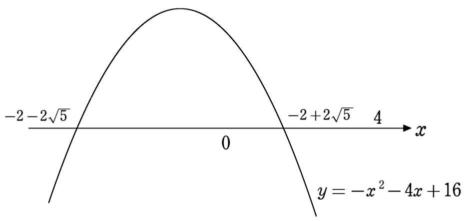
$$
\begin{aligned}
S&=\pi r^2\\
&=\pi\left(\frac{x\sqrt{16-x^2}}{2(4+x)}\right)^2\\
&=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^2(16-x^2)}{(x+4)^2}\\
&=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^2(4-x)}{x+4}\\
&=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-x^3+4x^2}{x+4}
\end{aligned}
$$

$f(x)=x+4$，$g(x)=-x^3+4x^2$，$h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ とする。

このとき，$S=\dfrac{\pi}{4}\cdot h(x)$

$$
\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}\\
&=\frac{(-3x^2+8x)(x+4)-(-x^3+4x^2)\cdot 1}{(x+4)^2}\\
&=\frac{-2x(x^2+4x-16)}{(x+4)^2}\\
&=\frac{2x(-x^2-4x+16)}{(x+4)^2}
\end{aligned}
$$

① に注意すると，$h'(x)$ の符号は $-x^2-4x+16$ の符号と一致する。



増減表は

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(4)
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	最大	↘	

ただし，α は $-x^2-4x+16=0$，すなわち $x^2+4x-16=0$ の解のうち，① の範囲内にある $\alpha=-2+2\sqrt{5}$ である。

このとき，$h(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$

ここで，この α は $h'(\alpha)=0$，すなわち $g'(\alpha)f(\alpha)-g(\alpha)f'(\alpha)=0$

を満たしており，$\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}=\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$ を満たしている。

分数関数の極値を求める際の工夫です。計算結果が同じになるなら，次数の低い $\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$ で計算した方がお得です。

$$
\begin{aligned}
\text{ゆえに，}h(\alpha)&=\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}\\
&=\frac{-3\alpha^2+8\alpha}{1}\\
&=-3\alpha^2+8\alpha
\end{aligned}
$$

また，この α は $\alpha^2+4\alpha-16=0$，すなわち $\alpha^2=-4\alpha+16$ も満たす。

次数下げ

よって，$h(\alpha)=-3(-4\alpha+16)+8\alpha$

$$=20\alpha-48$$

S の最大値は

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}h(\alpha)&=\frac{\pi}{4}(20\alpha-48)\\
&=\pi(5\alpha-12)\\
&=\pi\{5(-2+2\sqrt{5})-12\}\\
&=(10\sqrt{5}-22)\pi \ \cdots 答
\end{aligned}
$$

【総括】

$h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ という分数関数において，$h'(x)=\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}$

ですから，この分数関数が $x=\alpha$ で極値をもつとき

$$g'(\alpha)f(\alpha)-g(\alpha)f'(\alpha)=0$$

$$g'(\alpha)f(\alpha)=g(\alpha)f'(\alpha)$$

となり，$f(\alpha)$，$f'(\alpha)$ が 0 でなければ，

$$\frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}=\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

が成立します。つまり，極値である $h(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}$ を計算する際に

$h(\alpha)=\dfrac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$ として計算しても構わないということになります。

巷では「安田の定理」と呼ばれているそうです。

（有名な予備校講師の安田亨先生）

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

本問においては，一見 △ABC が正三角形のときに（$x=2$ のときに）内接円の面積が最大になりそうな感じがしますが，その予感は見事に裏切られます。