$n=1,2,3,\cdots$ に対して，関数 $F_n(x)$ を

$$F_1(x)=\frac{1}{1+x},\quad F_{n+1}(x)=\frac{1}{1+F_n(x)}$$

で定義する。

また，$n=1,2,3,\cdots$ に対して数列 $\{f_n\}$ を

$$f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$$

で定義する。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $F_3(x)$ を求めよ。

(2) $n=2,3,4,\cdots$ に対して，$F_n(x)$ を f_{n-1}，f_n，f_{n+1} を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F_n(0)$ を求めよ。

＜ ’15 藤田保健衛生大 改 ＞

【戦略】

(1) **実験的な設問で，計算するだけです。**

(2) **フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ が $F_n(x)$ のどこに現れるかという部分に目を光らせながら実験を続けてみると**

$$F_3(x)=\frac{1}{1+\frac{1+x}{\boxed{2+x}}}=\frac{\boxed{2+x}}{3+2x}$$

$$F_4(x)=\frac{1}{1+\frac{2+x}{\boxed{3+2x}}}=\frac{\boxed{3+2x}}{5+3x}$$

と，確かにフィボナッチ数列が現れそうです。

次は $F_5(x)=\dfrac{5+3x}{8+5x}$ ← **前（$F_4(x)$）の分母** ← **前（$F_4(x)$）の分母分子の係数を足す**

という要領で作っていけますね。

一般には $F_n(x)=\dfrac{f_n+f_{n-1}x}{f_{n+1}+f_nx}$ $(n\geqq 2)$ **と予想できると思います。**

予想が立てば，あとは帰納法で証明します。

(3) $F_n(0)=\dfrac{f_n}{f_{n+1}}$ **ですから，フィボナッチ数列の隣接二項の比の極限を考えるということになります。**

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **という黄金比に収束するということはさすがに前面に出すわけにもいかないでしょうから，真面目に f_n を出して極限を考えます。**

ただし，途中経過を文字で簡潔に表現するなど，少しでも目に優しく処理していきます。

【解答】

(1)
$$F_2(x)=\frac{1}{1+F_1(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{(1+x)}{(1+x)+1}=\frac{1+x}{2+x}$$

$$F_3(x)=\frac{1}{1+F_2(x)}=\frac{1}{1+\frac{1+x}{2+x}}=\frac{(2+x)}{(2+x)+(1+x)}=\frac{2+x}{3+2x}\ \cdots 答$$

(2) $F_4(x)=\dfrac{1}{1+\frac{2+x}{3+2x}}=\dfrac{3+2x}{5+3x}$，$F_5(x)=\dfrac{1}{1+\frac{3+2x}{5+3x}}=\dfrac{5+3x}{8+5x}$

並べてみると

$F_2(x)=\dfrac{1+x}{2+x}$，$F_3(x)=\dfrac{2+x}{3+2x}$，$F_4(x)=\dfrac{3+2x}{5+3x}$，$F_5(x)=\dfrac{5+3x}{8+5x}$

$f_1=1$，$f_2=1$，$f_3=2$，$f_4=3$，$f_5=5$，$f_6=8$，$\cdots$ であり，

$F_2(x)=\dfrac{f_2+f_1x}{f_3+f_2x}$，$F_3(x)=\dfrac{f_3+f_2x}{f_4+f_3x}$，$F_4(x)=\dfrac{f_4+f_3x}{f_5+f_4x}$，$F_5(x)=\dfrac{f_5+f_4x}{f_6+f_5x}$

これより

$$F_n(x)=\frac{f_n+f_{n-1}x}{f_{n+1}+f_nx}\ (n\geqq 2)\ \cdots(*)$$

と予想できる。これを n についての数学的帰納法で証明する。

(i) $n=2$ のとき 上記実験から $(*)$ は正しい。

(ii) $n=k$ $(k=2,3,\cdots)$ のとき

$F_k(x)=\dfrac{f_k+f_{k-1}x}{f_{k+1}+f_kx}$ が成立すると仮定する。

$$F_{k+1}(x)=\frac{1}{1+F_k(x)}=\frac{1}{1+\frac{f_k+f_{k-1}x}{f_{k+1}+f_kx}}=\frac{f_{k+1}+f_kx}{(f_k+f_{k+1})+(f_{k-1}+f_k)x}$$

$$=\frac{f_{k+1}+f_kx}{f_{k+2}+f_{k+1}x}\quad(\because\ 数列\{f_n\}についての漸化式)$$

これより，$n=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

以上 (i)，(ii) より，$n=2,3,4,\cdots$ に対して

$$F_n(x)=\frac{f_n+f_{n-1}x}{f_{n+1}+f_nx}\ \cdots 答$$

(3)　$X^2-X-1=0$ の 2 解 α，β $(\alpha>\beta)$ を用いて

$$\begin{cases} f_{n+2}-\beta f_{n+1}=\alpha(f_{n+1}-\beta f_n) \\ f_{n+1}-\alpha f_{n+1}=\beta(f_{n+1}-\alpha f_n) \end{cases}$$

と 2 通りに変形できる。

これより，$\begin{cases} f_{n+1}-\beta f_n=(f_2-\beta f_1)\alpha^{n-1}=(1-\beta)\alpha^{n-1} \\ f_{n-1}-\alpha f_n=(f_2-\alpha f_1)\beta^{n-1}=(1-\alpha)\beta^{n-1} \end{cases}$

辺々引けば，$(\alpha-\beta)f_n=(1-\beta)\alpha^{n-1}-(1-\alpha)\beta^{n-1}$

これより，定数 A，B を用いて，$f_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}$ と表せる。

ゆえに，$f_{n+1}=A\alpha^n+B\beta^n$ と表せるため

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{A\alpha^n+B\beta^n}{A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}}$$

$$=\frac{A+B\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\dfrac{A}{\alpha}+\dfrac{B}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}$$

ここで，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ より，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{(1-\sqrt{5})^2}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

つまり，$\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$ であるため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n=0$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{A}{\dfrac{A}{\alpha}}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2) より，$F_n(0)=\dfrac{f_n}{f_{n+1}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}F_n(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{f_{n+1}}{f_n}}$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ …答

【総括】

(1) で計算ミスをすると，その後の予測が立てられませんから慎重に計算しましょう。

フィボナッチ数列という有名人が絡んでくる部分が本問の面白いところです。

なお，(3) で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$ が収束することを認めてよいならば

$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ の両辺を f_{n+1} で割ると

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}=1+\frac{f_n}{f_{n+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\alpha$ とすれば，$\alpha=1+\dfrac{1}{\alpha}$　で　$\alpha^2-\alpha-1=0$

$\alpha>0$ なので，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　と得ることになります。

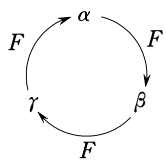
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

【余談】

本問とは別の話題ですが，分数関数 $F(x)=\dfrac{1}{1-x}$ も面白い性質をもっています。

$$F(\alpha)=\beta,\ F(\beta)=\gamma$$

とすると，$F(\gamma)=\alpha$ となるという巡回性をもっています。



$$\begin{aligned} F(\gamma)&=\frac{1}{1-\gamma} \\ &=\frac{1}{1-F(\beta)} \\ &=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\beta}} \\ &=\frac{1-\beta}{-\beta} \\ &=1-\frac{1}{\beta} \\ &=1-\frac{1}{F(\alpha)} \\ &=1-\frac{1}{\dfrac{1}{1-\alpha}} \\ &=1-(1-\alpha) \\ &=\alpha \end{aligned}$$