複素数 z に対して

$$f(z)=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\,\overline{z}\ ,\quad g(z)=-\overline{z}$$

という $f(z)$，$g(z)$ を考える。ただし，$\overline{z}$ は複素数 z の共役な複素数を表すものとする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 複素数 z に対して，$f(f(z))$ を計算せよ。

(2) O を原点とする複素数平面において，複素数 z，$f(z)$ が表す点をそれぞれ P，Q とし，線分 PQ の中点を M とする。
このとき，∠PMO の大きさを求めよ。

(3) i を虚数単位として，

$$\alpha=\overbrace{f\circ g\circ f\circ g\circ\cdots\circ f\circ g}^{2022\text{個}}\,(i)$$

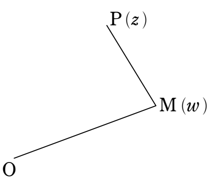
とするとき，α^{2022} の値を求めよ。

＜ 自作 ＞

【戦略】

(1) **計算するだけなので，落ち着いて処理しましょう。**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ **を回転（＆拡大（縮小））させて** $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ **になったと考えれば**



$$0-w=(z-w)\cdot R(\cos\theta+i\sin\theta)$$

という立式のイメージが立ちます。

つまり， $\dfrac{0-w}{z-w}$ **を計算したものを極形式で表現したときの偏角が分かれば解決です。**

(3) **線分 PQ の中点 M が xy 平面における $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 上に常にあることと (2) の結果を考えると，**

f **という変換は** $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ **に関する対称移動**

ということに辿り着きます。

g **という変換は y 軸に関する対称移動であることは計算せずとも分かるでしょう。**

i **という複素数は，xy 平面で言う $(0,\ 1)$ という点に対応しますから $(0,\ 1)$ から**

y **軸に関する対称移動**

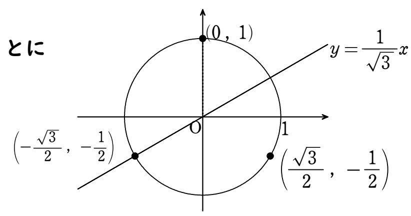
$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ **に関する対称移動**

を繰り返し行っていけばよいことが分かります。

$f\circ g\circ f\circ g\circ f\circ g\,(i)=i$

と自分自身に戻ってくることに気が付けば

2022 を 6 で割った余りに注目するでしょう。



今回は，$2022=6\cdot337$ なので，6 で割り切れるため $\alpha=i$ ということになりますから，i^{2022} を計算すればよいことになります。

$i^4=1$ **なので，** $i^{2022}=\{(i)^4\}^{505}\cdot i^2=-1$ **ということになり解決です。**

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}f(f(z))&=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\,\overline{f(z)}\\&=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\,\overline{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\overline{z}\right)}\\&=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\overline{\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}\cdot\overline{\overline{z}}\\&=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot z\\&=z\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2) 点 M が表す複素数を w とすると

$$\begin{aligned}w&=\frac{z+f(z)}{2}\\&=\frac{1}{2}\left\{z+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\,\overline{z}\right\}\\&=\frac{1}{2}z+\frac{1+\sqrt{3}i}{4}\overline{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{0-w}{z-w}&=\frac{w}{w-z}\\&=\frac{\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\,\overline{z}}{-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\,\overline{z}}\\&=\frac{(1+\sqrt{3}i)\overline{z}+2z}{(1+\sqrt{3}i)\overline{z}-2z}\end{aligned}$$

$z=a+bi$（a，b は実数）とおくと

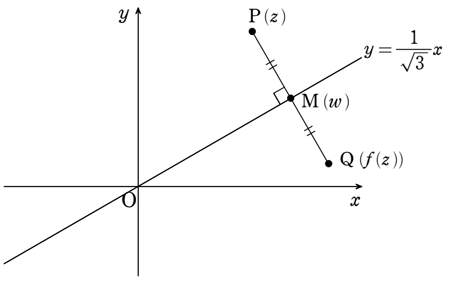
$$\begin{aligned}\frac{0-w}{z-w}&=\frac{(1+\sqrt{3}i)(a-bi)+2(a+bi)}{(1+\sqrt{3}i)(a-bi)-2(a+bi)}\\&=\frac{(3a+\sqrt{3}b)+(\sqrt{3}a+b)i}{(-a+\sqrt{3}b)+(\sqrt{3}a-3b)i}\\&=\frac{\{(3a+\sqrt{3}b)+(\sqrt{3}a+b)i\}\{(-a+\sqrt{3}b)-(\sqrt{3}a-3b)i\}}{\{(-a+\sqrt{3}b)+(\sqrt{3}a-3b)i\}\{(-a+\sqrt{3}b)-(\sqrt{3}a-3b)i\}}\\&=\frac{(-4\sqrt{3}a^2+8ab+4\sqrt{3}b^2)i}{(-a+\sqrt{3}b)^2+(\sqrt{3}a-3b)^2}\\&=-\frac{\sqrt{3}a^2-2ab-\sqrt{3}b^2}{a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2}\,i\end{aligned}$$

ゆえに，$\angle\mathrm{PMO}=\dfrac{\pi}{2}\cdots$答

(3)　$z=a+bi$ （a，b は実数）に対して

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}z+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\bar{z} \\ &= \frac{1}{2}(a+bi)+\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}(a-bi) \\ &= \frac{3a+\sqrt{3}\,b}{4}+\frac{\sqrt{3}\,a+b}{4}i \end{aligned}$$

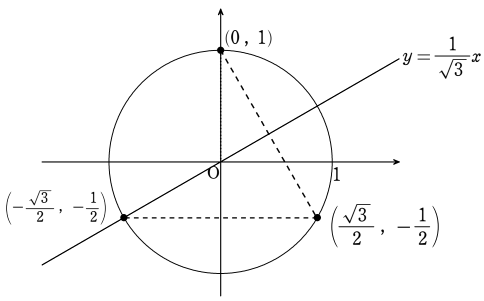
a，b の値に関わらず，$\left(\dfrac{3a+\sqrt{3}\,b}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}\,a+b}{4}\right)$ は xy 平面における $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ 上にある。



(2) の結果と合わせて考えると，複素数平面において点 P，Q は直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ について対称である。

つまり，点 z に f を施すと，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ について対称移動することになる。

一方，点 z に g を施すと，y 軸について対称移動する。



$f\circ g\circ f\circ g\circ f\circ g\,(i)=i$

よって，$h(z)=f\circ g\circ f\circ g\circ f\circ g\,(z)$ と定めると，$h(i)=i$

$2022=6\cdot 337$ なので，

$$\begin{aligned} \alpha &= \overbrace{h\circ h\circ h\circ\cdots\circ h}^{337\text{個}}(i) \\ &= i \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \alpha^{2022} &= (i)^{2022} \\ &= \{(i)^4\}^{505}\cdot i^2 \\ &= -1 \quad \cdots 答 \end{aligned}$$

【総括】

隠そうと思えば色々な部分を隠して出題できますし，オチも色々考えられます。

いかにも意味ありげな $f(z)$，$g(z)$ ですから，図形的に何を表しているかを看破する方向に向かいたいところですし，そういう方向にいくように (2) という設問をつけました。