m が 3 以上の整数のとき，和

$$\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$$

を求めよ。

＜ ’13 千葉大 改 ＞

【戦略】

$\sum$ 計算の基本方針は

①：公式の活用
②：差分解からの和の中抜け
③：二項定理の活用

です。

① の「公式の活用」については $\sum 1$，$\sum k$，$\sum k^2$，$\sum k^3$，$\sum r^k$ という明確な形がシグナルであり，特に困ることはないでしょう。

③ の「二項定理の活用」については

ベースは

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

という二項展開を活用する方針です。

特に有名なのは $x=1$ とした $\sum\limits_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$ というものでしょう。

つまり，コンビネーションが絡んだ $\sum$ は ③ の二項定理の活用を疑うことが多いわけです。

①，③ という明確なシグナルがない場合，② の差分解からの和の中抜けを狙っていきます。

$\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$ という差の形の $\sum$ は

$$(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots\cdots+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}$$

とバサバサ消えていきます。

本問の場合，二項係数が絡んできているため，③ の二項定理の活用を疑いますが，逆数となっているため見通しが苦しいです。

なので，差分解からの和の中抜けを狙っていきます。

差分解を狙っていくとなると

$\dfrac{1}{{}_k\mathrm{C}_3}=\dfrac{6}{k(k-1)(k-2)}$ なので，これについては部分分数分解を狙っていきたい形です。

$$\frac{1}{(k-2)(k-1)}-\frac{1}{(k-1)k}=\frac{k-(k-2)}{k(k-1)(k-2)}=\frac{2}{k(k-1)(k-2)}$$

なので，両辺 3 倍すれば

$$\frac{6}{k(k-1)(k-2)}=3\left\{\frac{1}{(k-2)(k-1)}-\frac{1}{(k-1)k}\right\}\quad(k\geqq 3)$$

が得られるため，解決です。

【解答】

$k=3，4，5，\cdots$ において

$$\frac{1}{{}_k\mathrm{C}_3}=\frac{6}{k(k-1)(k-2)}$$

$$3\left\{\frac{1}{(k-2)(k-1)}-\frac{1}{(k-1)k}\right\}=3\left\{\frac{k-(k-2)}{k(k-1)(k-2)}\right\}=\frac{6}{k(k-1)(k-2)}$$

より，

$$\frac{1}{{}_k\mathrm{C}_3}=3\left\{\frac{1}{(k-2)(k-1)}-\frac{1}{(k-1)k}\right\}\ (k=3，4，\cdots)$$

が成り立つ。

$b_k=\dfrac{1}{(k-2)(k-1)}$ $(k=3，4，\cdots)$ とおくと

以上から，3 以上の整数 m に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{m}\frac{1}{{}_k\mathrm{C}_3}&=\sum_{k=3}^{m}3\{b_k-b_{k+1}\}\\
&=3\sum_{k=1}^{m}\{b_k-b_{k+1}\}\\
&=3\{(b_3-b_4)+(b_4-b_5)+\cdots\cdots+(b_m-b_{m+1})\}\\
&=3(b_3-b_{m+1})\\
&=3\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{m(m-1)}\right\}\\
&=3\cdot\frac{m(m-1)-2}{2m(m-1)}\\
&=\frac{3(m-2)(m+1)}{2m(m-1)}\ \cdots\text{答}
\end{aligned}$$

【総括】

原題は誘導がありました。

原題

整数 p，q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して二項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p\,!}{q\,!\,(p-q)!}$ と定める。
なお，$0!=1$ とする。

(1)　n，k が 0 以上の整数のとき，

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right) $$

を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和

$$ \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} $$

を求めよ。

誘導があれば，本問は標準的なレベルの問題です。

(1) は計算するだけなので，割愛しますが

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)=\cdots(\text{途中経過は割愛})\cdots=\frac{k}{k+1} $$

となります。

この等式で，$k=2$ としてやれば

$$ {}_{n+3}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3} $$

を得ます。

これにより，$\dfrac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\dfrac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)$ を得るわけです。

これは $\dfrac{1}{{}_{\bigcirc}\mathrm{C}_3}=(\text{定数})(b_{\square}-b_{\square+1})$ という構造で，差分解できていることを意味します。

ただ，今回の $\displaystyle\sum_{k=3}^{m}\frac{1}{{}_k\mathrm{C}_3}$ を考えるにあたり，

$\dfrac{1}{{}_k\mathrm{C}_3}$，すなわち $\dfrac{6}{k\,(k-1)\,(k-2)}$ を差分解する

$\rightarrow$ 部分分数分解を使って差分解する

という流れは難関大を目指すにあたってノーヒントでもいけてほしいため誘導は外しました。