不動点を利用した合成方程式【類題】

$f(x)$ を x の整式とする。実数 α が方程式 $f(x)=x$ の解であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　整式 $f(f(x))-x$ は $x-\alpha$ で割り切れることを示せ。

(2)　$f(x)=x^2-3x-2$ とする。このとき方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

＜ ' 94 奈良女子大 ＞

【戦略 1】

(1)　$g(x)=f(f(x))-x$ **などとおきます。**

$g(x)$ **が** $x-\alpha$ **で割り切れることを示したければ**

$$g(\alpha)=0$$

ということが言えれば解決です。

(2)　$f(x)=x^2-3x-2$ **のとき，**$f(x)=x$ **という 2 次方程式は，**

$$x^2-4x-2=0$$

となりますから，実数解 $x=2\pm\sqrt{6}$ **をもちます。**

汚いので，α，β **などとおいて話を進めます。**

(1) **の結果から，**$f(f(x))-x$ **は** $x-\alpha$ **でも，**$x-\beta$ **でも割り切れることになります。**

これは，$(x-\alpha)(x-\beta)$（$=x^2-4x-2$）**で割り切れることを意味します。**

もっと言えば，$f(x)-x=x^2-4x-2$ **なので**

$f(f(x))-x$ **は** $f(x)-x$ **で割り切れる**

わけです。

そこで，$f(f(x))-x=\{f(x)\}^2-3f(x)-2-x$ **であり，これを** $f(x)-x$ **で割り算してみます。**

（**気持ちの上で，**$f^2-3f-x-2$ **という** f **の式を** $f-x$ **という** f **の式で割るというニュアンスで思えばいいです。**）

【解答】

(1)　α は $f(x)=x$ の解なので，$f(\alpha)=\alpha$ を満たす。

$g(x)=f(f(x))-x$ とおくと

$$\begin{aligned} g(\alpha)&=f(f(\alpha))-\alpha \\ &=f(\alpha)-\alpha \\ &=\alpha-\alpha \\ &=0 \end{aligned}$$

よって因数定理から $g(x)$ は $x-\alpha$ で割り切れる。

(2)　方程式 $f(x)=x$ すなわち $x^2-4x-2=0$ を考える。

この判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=2^2+2=6>0$ より異なる 2 つの実数解 $x=\alpha$，β をもつ

(1) から，$f(f(x))-x$ は $x-\alpha$ でも $x-\beta$ でも割り切れる，
つまり $(x-\alpha)(x-\beta)$（$=x^2-4x-2$）で割り切れることになる。

もっといえば，$f(x)-x$ で割り切れることになる。

$$f(f(x))-x=0$$

$$\{f(x)\}^2-3f(x)-2-x=0$$

$$\begin{array}{r|l} & f+(x-3) \\ \hline f-x & f^2-3f-x-2 \\ & f^2-xf \\ \hline & (x-3)f-x-2 \\ & (x-3)f-x(x-3) \\ \hline & x^2-4x-2 \end{array}$$

$$\{f(x)-x\}\{f(x)+x-3\}+x^2-4x-2=0$$

$$\{f(x)-x\}\{f(x)+x-3\}+f(x)-x=0$$

$$\{f(x)-x\}\{f(x)+x-2\}=0$$

$$(x^2-4x-2)(x^2-2x-4)=0$$

よって，求める解は $x=2\pm\sqrt{6}$，$1\pm\sqrt{5}$ …答

【戦略 2】(2) について

$f(f(x))-x$ を計算していく際，

「$f(x)-x$ で括れるはず」

という気持ちをもって「テクって」みます。

【解 2】(2) について

$$f(f(x))-x=f(x)^2-3f(x)-x-2$$

$$=f(x)^2-x^2+x^2-3f(x)-x-2$$

$$=\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}+x^2-3(x^2-3x-2)-x-2$$

$$=\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}-2x^2+8x+4$$

$$=\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}-2(x^2-4x-2)$$

$$=\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}-2\{f(x)-x\}$$

$$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x-2\}$$

$$=(x^2-4x-2)(x^2-2x-4)$$

よって，方程式 $f(f(x))-x=0$ は

$$(x^2-4x-2)(x^2-2x-4)=0$$

と変形でき，その解は $x=2\pm\sqrt{6}$，$1\pm\sqrt{5}$ …答

【総括】

$$f(f(x))-x=\{f(x)\}^2-3f(x)-2-x$$

$$=(x^2-3x-2)^2-3(x^2-3x-2)-x-2$$

とこの後の展開が嫌だったので【解 1】は「f を崩さずに」計算しています。

まぁ，この程度の計算であればさらに計算を続けて

$$=x^4+9x^2+4-6x^3+12x-4x^2-3x^2+9x+6-x-2$$

$$=x^4-6x^3+2x^2+20x+8$$

となり，これが $(x-\alpha)(x-\beta)\,(=x^2-4x-2)$ で割り切れることを利用してもよいでしょう。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x-4 \\
\hline
x^2-4x-2 & x^4-6x^3+2x^2+20x+8 \\
 & x^4-4x^3-2x^2 \\
\hline
 & \quad -2x^3+4x^2+20x+8 \\
 & \quad -2x^3+8x^2+4x \\
\hline
 & \qquad -4x^2+16x+8 \\
 & \qquad -4x^2+16x+8 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

より，

$$f(f(x))-x=(x^2-4x-2)(x^2-2x-4)$$

と因数分解できます。