$f(x)=x^2-\dfrac{4}{5}$ とおく。

(1)　2次方程式 $f(x)=x$ の2つの解を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$f(f(\alpha))$, $f(f(\beta))$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

＜ '11 日本女子大 ＞

【戦略 1】

(1)　**α, β を求めること自体は問題なく，$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ を整理した $5x^2-5x-4=0$ を解けばよく，$\alpha<\beta$ という条件から**

$$\alpha=\frac{5-\sqrt{105}}{10}\,,\ \beta=\frac{5+\sqrt{105}}{10}$$

を得ます。

まともに $f(f(\alpha))$, $f(f(\beta))$ をガチ計算すると大変です。

$$f(x)=x$$

という α, β の出どころの関係式に注目し，$f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ ということを上手く使います。

この α, β は日本語で言えば

「f という操作によって値が変化しない」

という性質ということです。

したがって，f を2回かました $f(f(\alpha))$ についても元々の α から変化することなく $f(f(\alpha))=\alpha$ ということになります。
同様に $f(f(\beta))=\beta$ ということも言えます。

(2)　**「$f(f(x))=x$ を満たす x 集まれ～」と呼びかけて，その中に $x=\alpha$, β が紛れ込むのは当然でしょう。**

$$\begin{aligned}f(f(x))&=f(x)^2-\frac{4}{5}\\&=\left(x^2-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\\&=x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}\end{aligned}$$

なので，$f(f(x))=x$，すなわち $f(f(x))-x=0$ を整理すると

$$x^4-\frac{8}{5}x^2-x-\frac{4}{25}=0$$

となります。

最初の目論見通り，この4次方程式の解の中に $x=\alpha$, β が紛れ込むわけです。

つまり，

$$\begin{aligned}x^4-\frac{8}{5}x^2-x-\frac{4}{5}&=(x-\alpha)(x-\beta)(\text{2次式})\\&=\left(x^2-x-\frac{4}{5}\right)(\text{2次式})\end{aligned}$$

という形で因数分解できるわけなので，割り算して相方の2次式を計算用紙などで計算すれば解決です。

【解 1】

(1)　$f(x)=x$，すなわち $x^2-\dfrac{4}{5}=x$ を整理すると

$5x^2-5x-4=0$ であり，これを解くと $x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$

$\alpha<\beta$ という条件から，$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

これらの α, β は $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ を満たすことから

$$\begin{aligned}f(f(\alpha))&=f(\alpha)\\&=\alpha\\&=\frac{5-\sqrt{105}}{10}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}f(f(\beta))&=f(\beta)\\&=\beta\\&=\frac{5+\sqrt{105}}{10}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \alpha=\frac{5-\sqrt{105}}{10}\ ,\ \beta=\frac{5+\sqrt{105}}{10}\ \cdots\text{答}$$

(2)　
$$\begin{aligned}f(f(x))&=f(x)^2-\frac{4}{5}\\&=\left(x^2-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\\&=x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(f(x))-x&=x^4-\frac{8}{5}x^2-x-\frac{4}{25}\\&=\left(x^2-x-\frac{4}{5}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

よって，方程式 $f(f(x))-x=0$ は

$$\left(x^2-x-\frac{4}{5}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{5}\right)=0$$

と変形でき，その解は $x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$ …答

【戦略 2】(2) について

$f(f(x))-x$ を計算していく際，

「$f(x)-x$ で括れるはず」

という気持ちをもって「テクって」みます。

【解 2】(2) について

$$f(f(x))-x=f(x)^2-\frac{4}{5}-x$$

$$=f(x)^2-x^2+x^2-x-\frac{4}{5}$$

テクッているように見えますが
$f(x)-x$（不動点を生じるパーツ）
をもつはずだという目論見です。

$$=\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}+f(x)-x$$

$$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x+1\}$$

$$=\left(x^2-x-\frac{4}{5}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{5}\right)$$

よって，方程式 $f(f(x))-x=0$ は

$$\left(x^2-x-\frac{4}{5}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{5}\right)=0$$

と変形でき，その解は $x=\dfrac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$ …答

【総括】

$f(x)=x$ を満たす x を「不動点」と言います。

f を施しても変化しない値ということです。

$$f(f(x))-x=\left(x^2-x-\frac{4}{5}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{5}\right)$$

という因数分解に辿り着くには，【戦略 1】なり，【戦略 2】なり，何かしらの目論見を持っている必要があります。