正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。例えば 2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。
m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数を全て求めよ。

＜ ’07 東京大 ＞

【戦略 1】

下 2 桁の値を 100 で割った余りと捉えるのが通常の発想です。

100 で割った余りですから，$m=100M+r$（$r=0,1,2,\cdots,99$）と分類したくなりますが，これだと当然ながら処理量が膨らむことになります。（そちらは【解 2】でやってみたいと思います。）

ただ，m^4 という 4 乗というものを扱うことを考えると，$m=10a+b$ のように

10 で割った余りで分類すれば十分

だと気がつけばしめたもので，そこからは一直線でしょう。

【解 1】

a は 0 以上の整数，b は $0\leqq b\leqq 9$ を満たす整数，a，b は同時に 0 でないものとして

$$m=10a+b$$

とおく。

このとき，

$$\begin{aligned}5m^4&=5(10a+b)^4\\&=5\left\{(10a)^4+{}_4\mathrm{C}_1(10a)^3b+{}_4\mathrm{C}_2(10a)^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3(10a)^1b^3+b^4\right\}\\&=(100\text{ の倍数})+5b^4\end{aligned}$$

したがって，$5m^4$ の下 2 桁（100 で割った余り）は $5b^4$ の下 2 桁の値と一致する。

$b=0,1,2,\cdots,9$ に対して，$f(b)=5b^4$ とすると

$f(0)=0$，$f(1)=5$，$f(2)=80$，$f(3)=405$，$f(4)=1280$，$f(5)=3125$，$f(6)=6480$，$f(7)=12005$，$f(8)=20480$，$f(9)=32805$

なので，これらの下 2 桁の値として現れるものは

0，5，25，80 …答

【戦略 2】

下 2 桁と聞いて，$m=100M+10a+b$ としたくなるのも無理はありません。（この場合 100 で割った余りを考えることになるわけです）

【戦略 1】でも述べたようにこうすると計算量が膨らみますが，やってできないことはありませんから，そちらで押し切ってみたいと思います。

ただ，「下二桁に影響を与えない部分は簡単に置き換える」などの工夫はしたいところです。（合同式で言えば mod 100 を考えることに相当します）

【解 2】

$m=10$ のとき，$5m^4$ は 50000 となり，下 2 桁が 0 と考えてよい。
そこで，m が 0 以上の整数全体を動くものと考えてもよい。

$m=100M+10a+b$（N は 0 以上の整数，a，b は 0 以上 9 以下の整数）とおく。

以下，合同式の法は 100 とする。

$m\equiv 10a+b$ より，

$$\begin{aligned}m^4&\equiv 10000a^4+{}_4\mathrm{C}_1(10a)^3b^1+{}_4\mathrm{C}_2(10a)^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3(10a)b^3+b^4\\&\equiv 40ab^3+b^4\end{aligned}$$

よって，
$$\begin{aligned}5m^4&\equiv 200ab^3+5b^4\\&\equiv 5b^4\end{aligned}$$

したがって，$5m^4$ の下 2 桁（100 で割った余り）は $5b^4$ の下 2 桁の値と一致する。

（以下【解 1】に準じる）

【総括】

【解 1】と【解 2】でやっていることは大きくは変わっていません。

なお，$f(b)=5b^4$ に対して，$f(0)\sim f(9)$ を計算するときに少し工夫ができます。

$x+y=10$ を満たす整数 x，y について，

$$\begin{aligned}5x^4-5y^4&=5(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\\&=50(x-y)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

であり，x，y の和が 10（＝偶数）なので，x，y の偶奇は一致します。

このことから $x-y$ も偶数ということになり，$5x^5-5y^4$ は 100 の倍数ということになります。

ゆえに，$5x^4$ と $5y^4$ を 100 で割った余りは等しい，つまり $5x^4$ と $5y^4$ の下 2 桁の値が等しいことになり，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ を調べれば，$f(9)$，$f(8)$，$f(7)$，$f(6)$ の調査の必要がなくなります。