0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。
たとえば，$C(12578)=78$，$C(6)=6$ である。
n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。
(1) x，y が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ。
(2) $C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。

＜ '99 京都大 ＞

【戦略】

(1) **10 進法表記の整数における下 2 桁の数とは**

100 で割った余り

です。

$C(nx)=C(ny)$ **ということは**

$$nx \equiv ny \pmod{100}$$

すなわち $nx-ny \equiv 0 \pmod{100}$

ということです。

これは $n(x-y) \equiv 0 \pmod{100}$，**すなわち**

$n(x-y)=100M$ (M：**整数**) **と表せる**

ということを意味しますが，n が素因数 2，5 をもたないことを考えれば，$x-y$ が 100 の倍数となることになります。

すなわち，$x-y \equiv 0 \pmod{100}$ ということになり，$x \equiv y \pmod{100}$ を得るため，題意が示されたことになります。

(2) **(1) の対偶を考えると見やすくなるでしょう。**

$$C(x) \fallingdotseq C(y) \Longrightarrow C(nx) \fallingdotseq C(ny)$$

ということが言えます。

日本語でかけば

「異なる下二桁の数は，n 倍しても下二桁は異なる」

ということです。

ということは

00，01，02，…，98，99 **という 100 個の異なる自然数を n 倍した**

0，n，$2n$，…，$98n$，$99n$ **という 100 個の数の下二桁は全て異なります。**

100 個の数の下二桁は 01 ～ 99 までの 100 個に対応しますが全て異なるとなると，1 対 1 対応ということになります。

つまり，n，$2n$，……，$99n$ の中に，下二桁が 01 となるようなものが存在することになります。

これは，$C(xn)=1$ となる 0 以上の整数 x の存在を意味します。

【解答】

(1) $C(nx)=C(ny)$ $\Leftrightarrow$ nx と ny の下 2 桁の数が等しい
$\Leftrightarrow$ nx と ny を100 で割った余りが等しい
$\Leftrightarrow$ $nx-ny$ が 100 の倍数

より，$n(x-y)=100M=2^2 \cdot 5^2 \cdot M$（$M$ は整数）

n は 2 でも 5 でも割り切れないので，n と $2^2 \cdot 5^2$ ($=100$) は互いに素であることを考えると，$x-y$ が 100 の倍数である。

これより，x と y を 100 で割った余りが等しいので，x と y の下 2 桁の数が等しいことになる。

つまり，$C(x)=C(y)$ が成り立ち，題意は示された．

(2) (1) の対偶である

「x，y が 0 以上の整数であるとき，$C(x) \fallingdotseq C(y) \Longrightarrow C(nx) \fallingdotseq C(ny)$」… (*)

は真である。

今，$C(0)=0$，$C(1)=1$，$C(2)=2$，……，$C(99)=99$ は全て異なる。

(*) より，$C(0)$，$C(n)$，$C(2n)$，……，$C(99n)$ の 100 個の数は全て異なる。

ゆえに，これら 100 個の数は 0，1，2，……，98，99 の 100 個の数に 1 対 1 対応することになる。

以上から，$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在する。

【総括】

(2) で主張していることは $nx \equiv 1 \pmod{100}$ となる非負整数 x の存在です。

今回の $\{C(0), C(n), \cdots, C(99n)\}$ という集合は，$\{0, 1, \cdots, 99\}$ という集合と一致します。

このとき，法を 100 として，これらの集合は完全剰余系と言います。
（100 で割った余りが全て入っている）

この完全剰余系にまつわる話についての議論の進め方は独特なものがありますが，幸いにも今回は (1)という誘導があるため，幾分かは完答が現実的です。（それでも差は付くでしょう）