次の問に答えよ。ただし，

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$，$\log_{10}11=1.0414$

とする。

(1) 3^{20} の 1 の位の数字を求めよ。

(2) n を自然数とし，3^n が 21 桁で 1 の位の数字が 7 となるとき，n の値を求めよ。

(3) 7^{70} の最高位の数字を求めよ。

(4) 7^{70} の最高位の次の数字を求めよ。

＜ ’18 早稲田大 ＞

【戦略】

(1) 3^1，3^2，3^3，3^4，3^5，… **の 1 の位は**

3，9，7，1

と，周期 4 で繰り返しが起こります。

よって，3^{20} の 1 の位は 4 番目の 1 であることが分かります。

(2)

$$\log_{10}3^n=n\log_{10}3$$
$$=0.4771n$$

ですから，$3^n=10^{0.4771n}$ ということになります。

3^n が 21 桁なので，$10^{20}\leqq 3^n<10^{21}$，すなわち

$$10^{20}\leqq 10^{0.4771n}<10^{21}$$

を得るため，$20\leqq 0.4771n<21$ から，$\dfrac{20}{0.4771}\leqq n<\dfrac{21}{0.4771}$ です。

$41.91\cdots\leqq n<44.01\cdots$ ですから，$n=42$，43，44 と特定されます。

このうち，1 の位が 7 であるのは，(1) の考察から 3^{4M+3} という形です。

$n=42$，43，44 のうち，4 で割って 3 余るものは 43 なので

$n=43$ が求めるものです。

(3)

$$\log_{10}7^{70}=70\log_{10}7$$
$$=70\cdot 0.8451$$
$$=59.157$$

ですから，$7^{70}=10^{59.157}\,(=10^{0.157}\cdot 10^{59})$ となります。

$10^{0.157}=☆.***\cdots$ と分かれば，7^{70} の最高位の数が☆となり解決します。

$10^0<10^{0.517}<10^{0.3010}$，すなわち，$1<10^{0.517}<2$ なので

$10^{59}<10^{59.157}<2\cdot 10^{59}$，すなわち $10^{59}<7^{70}<2\cdot 10^{59}$ を得て解決です。

(4) **$10^{0.157}=☆.***\cdots$ と分かれば，7^{70} の最高位の数が求まりました。**

今度は　の数が分かれば解決です。

そうなると，小数点を 1 つずらした $10^{1.157}$ として考えたくなります。

【解答】

(1) 3^1，3^2，3^3，3^4，3^5，… の 1 の位は

3，9，7，1

と，周期 4 で繰り返しが起こる。… (*)

よって，$3^{20}\,(=3^{4\cdot 5})$ の 1 の位の数字は 1 …答

(2)

$$\log_{10}3^n=n\log_{10}3$$
$$=0.4771n$$

よって，$3^n=10^{0.4771n}$ であり，条件から 3^n が 21 桁なので，$10^{20}\leqq 3^n<10^{21}$，すなわち

$$10^{20}\leqq 10^{0.4771n}<10^{21}$$

となる。

これより，$20\leqq 0.4771n<21$ なので，$\dfrac{20}{0.4771}\leqq n<\dfrac{21}{0.4771}$

よって，$41.91\cdots\leqq n<44.01\cdots$ であり，これを満たす整数 n は

$$n=42,\ 43,\ 44$$

一方 (1) の (*) より，$M=0$，1，2，… として，3^{4M+3} の形で表される数の 1 の位が 7 であるため，$n=42$，43，44 のうち，4 で割って 3 余るものは 43 であるため，求める n は

$$n=43 \ \cdots 答$$

(3)

$$\log_{10}7^{70}=70\log_{10}7$$
$$=70\cdot 0.8451$$
$$=59.157$$

より，$7^{70}=10^{59.157}\,(=10^{0.157}\cdot 10^{59})$ …① である。

$10^0<10^{0.157}<10^{0.3010}$，すなわち $1<10^{0.157}<2$ であり

$$10^{59}<10^{0.157}\cdot 10^{59}<2\cdot 10^{59}$$

① より，$10^{59}<7^{70}<2\cdot 10^{59}$ であるから，7^{70} の最高位の数は 1 …答

(4) ① より，$7^{70}=10^{1.157}\cdot 10^{58}$

$\log_{10}14=\log_{10}2+\log_{10}7=0.3010+0.8451=1.1461$

$$\log_{10}15=\log_{10}3+\log_{10}5$$
$$=\log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}$$
$$=\log_{10}3+(\log_{10}10-\log_{10}2)$$
$$=0.4771+(1-0.3010)$$
$$=1.1761$$

$10^{1.1461}<10^{1.157}<10^{1.1761}$，すなわち $14<10^{1.157}<15$ で，辺々 10^{58} をかけると

$14\cdot 10^{58}<10^{1.157}\cdot 10^{58}<15\cdot 10^{58}$ で，② より $14\cdot 10^{58}<7^{70}<15\cdot 10^{58}$

したがって，7^{70} の最高位の次の数字は 4 …答

【総括】

(1)，(2)，(3) までは定番の内容であり，難関大に合格したいのであれば，手が止まることは許されません。

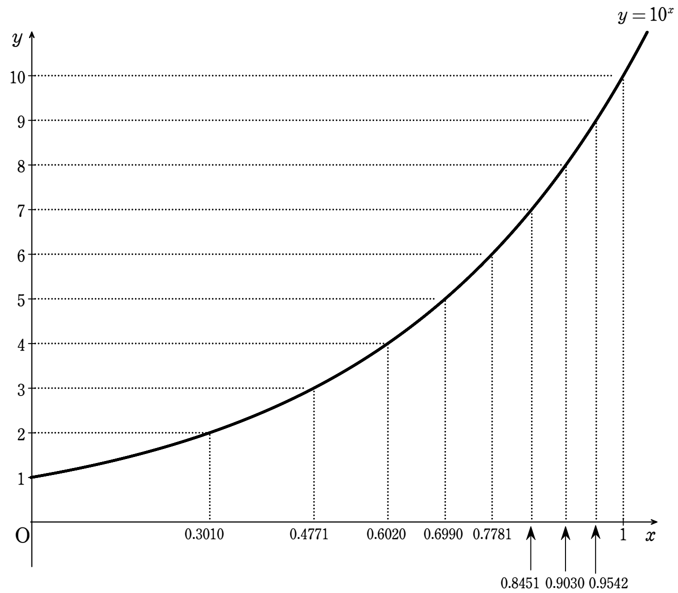
(4) も考え方は (3) の延長上にあります。

結局 $7^{70}=10^{\bigcirc}$ という形で表し，$10^{(\text{小数部分})}\cdot 10^{(\text{整数部分})}$ と見るわけです。

あくまでイメージですが，　が ☆.*** … だとすると　は小数点を動かすだけなので，最高位の数字が☆ということになります。
（もちろんこれはイメージで，答案としてはきちんと不等式で評価します。）

(4) は【戦略】でも述べたように，☆の次が欲しかったので，10 倍して小数点をもう一つ右にずらしたわけです。

$10^{(\text{小数部分})}$ がどの程度の値なのか「アタリをつける」ためには $y=10^x$ のグラフをイメージするとよいでしょう。



$\log_{10}2=0.3010$
$\log_{10}3=0.4771$
$\log_{10}4=2\log_{10}2=2\cdot 0.3010=0.6020$
$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$
$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$
$\log_{10}7=0.8451$
$\log_{10}8=3\log_{10}2=0.9030$
$\log_{10}9=2\log_{10}3=2\cdot 0.4771=0.9542$

$\log_{10}2$，$\log_{10}3$，$\log_{10}7$ は与えられないとどうしようもありませんが，その他については作れます。

なお，本問で与えられた $\log_{10}11=1.0414$ という近似値は使いませんでした。