2014^{10} に関して，以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば

$$7^9=40353607 \quad \text{および} \quad 7^{10}=282475249$$

を用いてよい。

(1) 2014^{10} の十の位の数字を求めよ。

(2) 2014^{10} の十万の位の数字を求めよ。

(3) 2014^{10} の上 3 桁の数字を求めよ。

＜ '14 岐阜大 ＞

【戦略】

与えらえた条件的に，常用対数をとって話を進めていくようには思えません。

7 の累乗を活用したいと思えば

$$\begin{aligned}2014^{10}&=(2\cdot 1007)^{10}\\&=2^{10}\cdot 1007^{10}\\&=2^{10}(1000+7)^{10}\end{aligned}$$

と見ることになるでしょう。

目がチカチカするので， $x=1000\,(=10^3)$ **とおき，**

$$2014^{10}=2^{10}(x+7)^{10}$$

とでもしておきます。

(1) **100 の位以上を無視するわけですから，** $\mathrm{mod}\ 100$ **で考えます。**

$\mathrm{mod}\ 100$ **では** $x\equiv 0$，$x^2\equiv 0$，$x^3\equiv 0$，$\cdots$，$x^{10}\equiv 0$ **であることに注意します。**

(2) **下 6 桁の値を捉えます。**
そうなると， $\mathrm{mod}\ 10^6$ **で考えることになります。**

$\mathrm{mod}\ 10^6$ **では** $x^2\equiv 0$，$x^3\equiv 0$，$\cdots$，$x^{10}\equiv 0$ **であることに注意します。**

(3) **上 3 桁となると，今度は** x^{10}，x^9，$\cdots$ **という次数の高い方に視線を向けることになるでしょう。**

$$(7+x)^{10}=x^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_9\cdot 7\cdot x^9+{}_{10}\mathrm{C}_8\cdot 7^2\cdot x^8+{}_{10}\mathrm{C}_7\cdot 7^3\cdot x^7+\cdots\cdots$$

$$=10^{30}+7\cdot 10^{28}+45\cdot 49\cdot 10^{24}+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 7^3\cdot 10^{21}+\cdots\cdots$$

$$2014^{10}=2^{10}\cdot 10^{30}+2^{10}\cdot 7\cdot 10^{28}+2^{10}\cdot 45\cdot 49\cdot 10^{24}+2^{10}\cdot 12\cdot 7^3\cdot 10^{22}+\cdots$$

となります。

「もうこれ以降は，上 3 桁に影響ないわ」

と言えるまで調べます。

【解答】

$$\begin{aligned}2014^{10}&=(2\cdot 1007)^{10}\\&=2^{10}(1000+7)^{10}\\&=2^{10}(10^3+7)^{10}\\&=2^{10}(7+x)^{10}\quad (x=10^3\text{ とおいた})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7+x)^{10}=&\,7^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\,7^9x+{}_{10}\mathrm{C}_2\,7^8x^2+{}_{10}\mathrm{C}_3\,7^7x^3+{}_{10}\mathrm{C}_4\,7^6x^4+{}_{10}\mathrm{C}_5\,7^5x^5\\&+{}_{10}\mathrm{C}_6\,7^4x^6+{}_{10}\mathrm{C}_7\,7^3x^7+{}_{10}\mathrm{C}_8\,7^2x^8+{}_{10}\mathrm{C}_9\,7x^9+x^{10}\end{aligned}$$

(1) 以下，合同式の法は 100 とすると，

$$x\equiv 0,\ x^2\equiv 0,\ x^3\equiv 0,\ \cdots,\ x^{10}\equiv 0 \quad \cdots①$$

① より $2014^{10}\equiv 2^{10}\cdot 7^{10}$

$2^{10}=1024\equiv 24$， $7^{10}=282475249\equiv 49$ なので

$$2014^{10}\equiv 24\cdot 49=1176\equiv 76$$

以上から，2014^{10} を 100 で割った余り（下二桁）は 76

ゆえに，2014^{10} の十の位は 7 …答

(2) 以下，合同式の法は 10^6 とする。

$$x^2\equiv 0,\ x^3\equiv 0,\ \cdots,\ x^{10}\equiv 0 \quad \cdots②$$

② から
$$\begin{aligned}(7+x)^{10}&\equiv 7^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\,7^9x\\&=7^{10}+7^9\cdot 10^4\\&=7^9(7+10^4)\\&=7^9\cdot 10007\end{aligned}$$

$7^9=40353607\equiv 353607$ より，$(7+x)^{10}\equiv 353607\cdot 10007$

$$\begin{aligned}2014^{10}&\equiv 2^{10}\cdot 353607\cdot 10007\\&=1024\cdot 353607\cdot 10007\\&=(x+24)(353x+607)(10x+7)\end{aligned}$$

② に注意すると

② から $ax+b$ の形になります。

$$\begin{aligned}2014^{10}&\equiv(607\cdot 7+353\cdot 24\cdot 7+24\cdot 607\cdot 10)x+24\cdot 607\cdot 7\\&=(4249+59304+145680)x+101976\\&=209233x+101976\\&=209233000+101976 \quad (\because\ x=10^3)\\&\equiv 233000+101976\\&=334976\end{aligned}$$

以上から，2014^{10} の下 6 桁は 334976 であり，

十万の位の数字は 3 …答

(3)

$$(7+x)^{10}=x^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_9\cdot 7\cdot x^9+{}_{10}\mathrm{C}_8\cdot 7^2\cdot x^8+{}_{10}\mathrm{C}_7\cdot 7^3\cdot x^7+\cdots\cdots$$

$$=10^{30}+7\cdot 10^{28}+45\cdot 49\cdot 10^{24}+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 7^3\cdot 10^{21}+\cdots\cdots$$

$$2014^{10}=2^{10}\cdot 10^{30}+2^{10}\cdot 7\cdot 10^{28}+2^{10}\cdot 45\cdot 49\cdot 10^{24}+2^{10}\cdot 12\cdot 7^3\cdot 10^{22}+\cdots$$

ここで，最初の二項を計算すると

$$\begin{aligned}2^{10}\cdot 10^{30}+2^{10}\cdot 7\cdot 10^{28}&=2^{10}\cdot 10^{28}(10^2+7)\\&=1024\cdot 107\cdot 10^{28}\\&=109568\cdot 10^{28}\end{aligned}$$

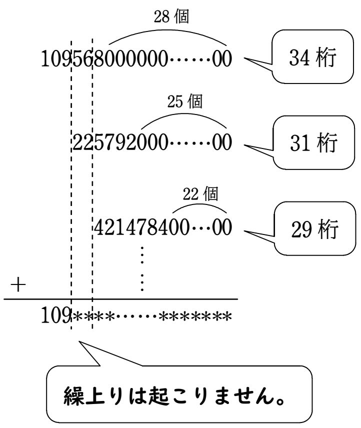
第 3 項は

$$\begin{aligned}2^{10}\cdot 45\cdot 49\cdot 10^{24}&=2^9\cdot 2\cdot 5\cdot 9\cdot 49\cdot 10^{24}\\&=2^9\cdot 9\cdot 49\cdot 10^{25}\\&=225792\cdot 10^{25}\end{aligned}$$

第 4 項は

$$2^{10}\cdot 12\cdot 7^3\cdot 10^{22}=4214784\cdot 10^{22}$$

第 5 項以降の桁数はこれよりも減少していく。



ゆえに，求める 2014^{10} の上 3 桁の値は 109 …答

【総括】

どちらかと言うと，二項展開や，合同式が絡む高次計算としての力が求められる問題でした。

(2) ももっと手際よく進めることも出来ると思います。

(3) は最後の筆算のイメージがあれば，「ここを調べよう」という調査対象が見えてくるでしょう。