a^2，b^2，c^2 が三角形の 3 辺の長さを表すとき，全ての実数 x に対して

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$$

が成立することを示せ。

＜例題の対比問題＞

【戦略】

例題同様，$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ の判別式 D に対して $D<0$ を目指せばよいことになります。

例題と違い，今度は $D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$ ですから，

$$(\qquad)^2-(\qquad)^2$$

の形で和と差の積が狙えます。

$$\begin{aligned}D&=\{(b^2+c^2-a^2)+2bc\}\{(b^2+c^2-a^2)-2bc\}\\&=\{(b+c)^2-a^2\}\{(b-c)^2-a^2\}\\&=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)\end{aligned}$$

となるため，モロに三角形の成立条件

$$\begin{cases}a+b>c \iff a+b-c>0\\ b+c>a \iff b+c-a>0\\ c+a>b \iff c+a-b>0\end{cases}$$

が効いてくる形が現れます。

【解答】

$b^2>0$ であることに注意する。

2 次方程式 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ の判別式を D として $D<0$ を示せば題意は示される。

$$\begin{aligned}D&=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\\&=\{(b^2+c^2-a^2)+2bc\}\{(b^2+c^2-a^2)-2bc\}\\&=\{(b+c)^2-a^2\}\{(b-c)^2-a^2\}\\&=(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)\end{aligned}$$

a，b，c は三角形の 3 辺の長さを表すという条件から

$$\begin{cases}a+b>c \iff a+b-c>0\\ b+c>a \iff b+c-a>0\\ c+a>b \iff c+a-b>0\end{cases}$$

を満たす。

ゆえに

$$b+c+a>0,\ b+c-a>0,\ b-c+a>0,\ b-c-a<0$$

これより，$D<0$ となり，題意は示された。

【総括】

例題の「テク」に引きずられると火傷をする教訓となるでしょう。

あらためて数学の学習において

「覚えるべき部分」と「覚えたことを形を見て運用する部分」

の線引きが難しいかが実感できます。