a，b，c が三角形の 3 辺の長さを表すとき，全ての実数 x に対して

$$bx^2+(b+c-a)x+c>0$$

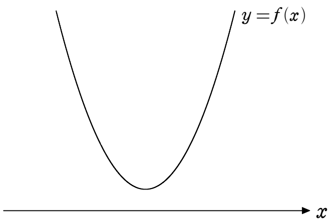
が成立することを示せ。

＜有名問題＞

【戦略】

$f(x)=bx^2+(b+c-a)x+c$ とします。

全ての x に対して 2 次式 $f(x)$ の値が正ということは



というように浮いていればよいわけです。

したがって 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D として $D<0$ を目指せばよいことになります。

$$\begin{aligned} D&=(b+c-a)^2-4bc \\ &=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

ですが，ここからが問題です。

三角形の成立条件 $\begin{cases} a+b>c \iff a+b-c>0 \\ b+c>a \iff b+c-a>0 \\ c+a>b \iff c+a-b>0 \end{cases}$ **をどこかで効かせていきたいわけです。**

そこで

$$\begin{aligned} D&=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca-a^2-b^2-c^2 \\ &=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-a^2-b^2-c^2 \\ &=\{(a-b)^2-c^2\}+\{(b-c)^2-a^2\}+\{(c-a)^2-b^2\} \\ &=(a-b+c)(a-b-c)+(b-c+a)(b-c-a)+(c-a+b)(c-a-b) \end{aligned}$$

と見れれば解決です。

有名な恒等式

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\} \\ &=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

を応用したわけです。

【解答】

$b>0$ であることに注意する。

2 次方程式 $bx^2+(b+c-a)x+c=0$ の判別式を D として $D<0$ を示せば題意は示される。

$$\begin{aligned} D&=(b+c-a)^2-4bc \\ &=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca) \\ &=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca-a^2-b^2-c^2 \\ &=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-a^2-b^2-c^2 \\ &=\{(a-b)^2-c^2\}+\{(b-c)^2-a^2\}+\{(c-a)^2-b^2\} \\ &=(a-b+c)(a-b-c)+(b-c+a)(b-c-a)+(c-a+b)(c-a-b) \end{aligned}$$

a，b，c は三角形の 3 辺の長さを表すという条件から

$$\begin{cases} a+b>c \iff a+b-c>0 \\ b+c>a \iff b+c-a>0 \\ c+a>b \iff c+a-b>0 \end{cases}$$

を満たす。

$a-b+c>0$，$a-(b+c)<0$ より $(a-b+c)(a-b-c)<0$

$b-c+a>0$，$b-(c+a)<0$ より $(b-c+a)(b-c-a)<0$

$c-a+b>0$，$c-(a+b)<0$ より $(c-a+b)(c-a-b)<0$

これより，$D<0$ となり，題意は示された。

【総括】

判別式 D を考えて $D<0$ を示せばよいという方針はすぐにたちますが

$$D=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$$

とした時点で青ざめてくると思います。

「三角形の成立条件を効かせたい」という思いなしに，この後の手は進まないでしょう。

なお，本問の a，b，c という設定を a^2，b^2，c^2 という設定に変えるだけで表情が変わります。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

追加対比問題

a^2，b^2，c^2 が三角形の 3 辺の長さを表すとき，全ての実数 x に対して

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$$

が成立することを示せ。

もちろん本問の【解答】をなぞると

$$D=(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)+(b^2-c^2+a^2)(b^2-c^2-a^2)+(c^2-a^2+b^2)(c^2-a^2-b^2)$$

となって，「鋭角三角形だったらいいのに」と唇を噛みます。

設定一つで態度が変わる面白さと怖さがあります。