自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots\cdots111}^{n\text{ 個}}$ を $f(n)$ で表す。

例えば $f(1)=1$，$f(2)=11$，$f(3)=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$f(3^m)$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$f(n)$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

＜ ’08 東京大 一部表現を変更 ＞

【戦略】

(1) **$f(3^m)$ の素因数 3 の個数が m 個だということを示す趣旨です。直接示すのは困難ですから，数学的帰納法に走るのが自然な流れです。**

(2) **n，$f(n)$ の素因数 3 の個数に注目することから $n=3^a\cdot b$（b は 3 と互いに素）などとおいて話を進めていくのが自然でしょうか。**

そのときに

$$f(3^a\cdot b)=\overbrace{111\cdots111}^{3^a\text{ 個}}\ \overbrace{111\cdots111}^{3^a\text{ 個}}\ \cdots\cdots\overbrace{111\cdots111}^{3^a\text{ 個}}$$

と b 個の $\overbrace{111\cdots111}^{3^a\text{ 個}}$ に分割できれば $f(3^a)$ でくくれることを見越しておきたいところです。

【解答】

(1) $f(3^m)$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れない $\cdots(*)$

ということを m に関する数学的帰納法で示す。

(i) $m=0$ のとき $f(3^0)=f(1)=1$ で，これは 3^0 で割り切れるが，3^1 で割り切れない。

よって，$m=0$ のとき $(*)$ は正しい。

(ii) $m=k$（$k=0,1,2,\cdots$）のとき $(*)$ が正しいと仮定する。

つまり，$f(3^k)=3^k M$（M は 3 の倍数でない整数）と仮定する。

$$\begin{aligned}
f(3^{k+1})&=\overbrace{111\cdots\cdots111}^{3^{k+1}\text{ 個}}\\
&=\overbrace{111\cdots111}^{3^k\text{ 個}}\ \overbrace{111\cdots111}^{3^k\text{ 個}}\ \overbrace{111\cdots111}^{3^k\text{ 個}}\\
&=f(3^k)\times10^{2\cdot3^k}+f(3^k)\times10^{3^k}+f(3^k)\\
&=f(3^k)\left\{10^{2\cdot3^k}+10^{3^k}+1\right\}
\end{aligned}$$

ここで，{ } 内 $\equiv 1+1+1\equiv 0 \pmod 3$

一方，{ } 内 $\equiv 1+1+1=3 \pmod 9$

{ } 内が素因数 3 を 1 個はもつけど，2 個以上はもたないことを意味しています。

より，$f(3^{k+1})$ を素因数分解したときの素因数 3 の個数は $k+1$ 個

なので，$f(3^{k+1})$ は 3^{k+1} で割り切れるが，3^{k+2} では割り切れない。

つまり，$m=k+1$ のときも $(*)$ は正しい。

以上 (i)，(ii) より，$m=0,1,2,\cdots$ について，$(*)$ は正しいことが示された。

(2) n のもつ素因数 3 の個数を a とする。

つまり，$n=3^a\cdot b$（b は 3 と互いに素な整数）とする。

$$\begin{aligned}
f(n)&=f(3^a\cdot b)\\
&=\overbrace{111\cdots\cdots111}^{3^a\cdot b\text{ 個}}\\
&=\overbrace{\overbrace{111\cdots\cdots111}^{3^a\text{ 個}}\ \overbrace{111\cdots\cdots111}^{3^a\text{ 個}}\ \overbrace{111\cdots\cdots111}^{3^a\text{ 個}}\ \cdots\cdots\ \overbrace{111\cdots\cdots111}^{3^a\text{ 個}}}^{b\text{ 個}}\\
&=f(3^a)\times10^{3^a(b-1)}+f(3^a)\times10^{3^a(b-2)}+\cdots+f(3^a)\times10^{3^a}+f(3^a)\\
&=f(3^a)\left\{10^{3^a(b-1)}+10^{3^a(b-2)}+\cdots+10^{3^a}+1\right\}
\end{aligned}$$

{ } 内 $\equiv 1+1+1+\cdots+1=b \pmod 3$

b は 3 と互いに素な整数であるから，
$f(n)$ のもつ素因数 3 の個数は $f(3^a)$ のもつ素因数 3 の個数である。

よって，

$f(n)$ が 27 で割り切れる $\Longleftrightarrow$ $f(3^a)$ が 27 で割り切れる $\cdots$ ①

また，

$$a \geqq 3 \Longrightarrow f(3^a) \text{ は } 3^3(=27) \text{ で割り切れる（}\because (1)\text{）}$$

$f(3^a)$ が 27 で割り切れる $\Longrightarrow a \geqq 3$

なぜならば，$a \leqq 2 \Longrightarrow f(3^a)$ は 27 で割り切れない

これは $a=1$，2 のときを調べると，$f(3)=111$，$f(9)=111111111$ が 27 で割り切れないことを確かめれば分かる。

これより，$a \geqq 3 \Longleftrightarrow f(3^a)$ は $3^3(=27)$ で割り切れる … ②

さらに

$$n\,(=3^a \cdot b) \text{ が } 27 \text{ で割り切れる} \Longleftrightarrow a \geqq 3 \cdots ③$$

①，②，③ より $f(n)$ が 27 で割り切れる $\Longleftrightarrow n$ が 27 で割り切れる

となり，題意は示された。

【戦略２】(2) について

例えば $11111=1+10+100+1000+10000=\sum_{k=0}^{4} 10^k$ **という見方ができます。**

つまり，レピュニット数を $\sum 10^k$ **という形で見ます。**

さらにそこから $10^3 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 27)$ **であることに気がつけば，非常にクリアーに処理できます。**

【解 2】(2) について

$1000=27 \cdot 37+1$ より，$10^3 \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 27)$

以下合同式の法は 27 を法とする。

$k=3\ell$ のとき，$10^k=10^{3\ell}=(10^3)^\ell \equiv 1^\ell=1$
$k=3\ell+1$ のとき $10^k=10^{3\ell+1} \equiv 10$
$k=3\ell+2$ のとき $10^k=10^{3\ell+2} \equiv 100 \equiv 19$

よって，M を自然数として

$$\begin{cases} f(3M)=\sum_{k=0}^{3M-1} 10^\ell=\sum_{l=0}^{M-1}(10^{3\ell}+10^{3\ell+1}+10^{3\ell+2}) \equiv \sum_{l=0}^{M-1}(1+10+19)=30M \equiv 3M \\ f(3M+1)=f(3M)+10^{3M} \equiv 3M+1 \\ f(3M+2)=f(3M+1)+10^{3M+1} \equiv 3M+1+10=3M+11 \end{cases} \cdots (☆)$$

ただし，$f(1)=1 \equiv 1$，$f(2)=11 \equiv 11$ なので，

$$\begin{cases} f(3M+1) \equiv 3M+1 \\ f(3M+2) \equiv 3M+11 \end{cases}$$

は M が 0 以上の整数のときも成り立つ。

n が 27 で割り切れるとき，$n=3N$（N は 9 の倍数）と表せるので

$f(n)=f(3N) \equiv 3N \equiv 0$（$\because N$ は 9 の倍数）となり，$f(n)$ は 27 で割り切れる。

逆に $f(n)$ が 27 で割り切れるとき，(☆) より，n は 3 の倍数

したがって，$n=3A$（A は自然数）とおけるので，

$$f(n)=f(3A) \equiv 3A\ (\because (☆))$$

今，$f(n)$ が 27 で割り切れることから A は 9 の倍数となる。

ゆえに，$n\,(=3A)$ は 27 で割り切れる

以上から，n が 27 で割り切れる $\Longleftrightarrow f(n)$ が 27 で割り切れる

ということが示された。

【戦略 3】(2) について

$$n\text{ が } 3 \text{ の倍数} \Leftrightarrow n\text{ の各桁の総和が } 3 \text{ の倍数}$$
$$n\text{ が } 9 \text{ の倍数} \Leftrightarrow n\text{ の各桁の総和が } 9 \text{ の倍数}$$

ということは常識です。

もちろん， $10^m \equiv 1 \pmod 3$，$10^m \equiv 1 \pmod 9$ **を利用して**

$$n=\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

と見ることがその根拠です。

これをとっかかりとして

「27 の倍数の判定法を作ってしまおう」

という大胆な作戦でアプローチしてみます。

【解 3】(2) について

$f(n)$ が 27 で割り切れるときを考える。

$$f(n)=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1 \equiv 1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1+1=n \pmod 3$$

であり，$f(n)$ が 27 で割り切れるとき，$f(n)$ は 3 で割り切れるから

$n \equiv 0 \pmod 3$，すなわち n は 3 の倍数である。

ゆえに，$n=3L$（L は自然数）とおける。

$$\begin{aligned} f(n)&=f(3L)\\ &=\overbrace{111\ 111\ 111\ \cdots 111}^{3L\text{ 個}}\\ &=111(10)^{3L-3}+111(10)^{3L-6}+\cdots\cdots+111(10)^3+111\\ &\equiv 111+111+\cdots\cdots+111+111 \pmod{27} \end{aligned}$$

これより，$f(n) \equiv 111L=3\cdot 37\cdot L \pmod{27}$

37 と 9 は互いに素であるから，$f(n)$ が 27 で割り切れるとき，

L が 9 の倍数である。

逆に n が 27 で割り切れるとき，$n=3L$（L は 9 の倍数）とおける。

このとき，上の議論から

$$f(n) \equiv 3\cdot 37\cdot L \pmod{27}$$

で，L は 9 の倍数であるから $f(n) \equiv 0 \pmod{27}$ となり，$f(n)$ は 27 で割り切れる。

以上から，n が 27 で割り切れることが，$f(n)$ が 27 で割り切れるための必要十分条件である。

【総括】

1 が並んでいる数（レピュニット数）を扱った問題で，深掘りできる題材です。

【解 2】【解 3】についてですが，例えば 11111 を 27 で割った余りを考えたいときに

$$\begin{aligned} 11111&=1+10+10^2+10^3+10^4\\ &\equiv 1+10+19+1+10\\ &=41\\ &\equiv 14 \pmod{27} \end{aligned}$$

という見方をするのが，【解 2】の見方です。

一方 11111 を

11 / 111 と下から 3 桁毎に分けて，

$$11+111=122 \equiv 14 \pmod{27}$$

と見てしまおうというのが【解 3】の見方です。