

ラメの定理 【ユークリッドの互除法の計算回数】

a, b を $a > b$ であるような正の整数とし, a は b で割り切れないとする。
このとき

a を b で割ったときの商を q_1 , 余りを r_1

b を r_1 で割ったときの商を q_2 , 余りを r_2

r_1 を r_2 で割ったときの商を q_3 , 余りを r_3

r_2 を r_3 で割ったときの商を q_4 , 余りを r_4

⋮

r_{N-3} を r_{N-2} で割ったときの商を q_{N-1} , 余りを r_{N-1}

r_{N-2} を r_{N-1} で割ったときの商を q_N , 余りを $r_N (=0)$

とする。

また, $\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$ で定まる数列 $\{F_n\}$ を考える。

- (1) $N=2$ のとき, $r_1 \geq F_2$ を示せ。
- (2) $N \geq 3$ とする。 $k=2, 3, \dots, N$ に対して, $r_{N+1-k} \geq F_k$ を示せ。
- (3) $b \geq F_{N+1}$ であることを示せ。
- (4) φ を $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解, すなわち $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とするとき,
 $F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$ であることを示せ。
- (5) b が M 桁であるとき, $N \leq 5M$ であることを示せ。