サイコロを n 回投げたとき，出た目の最小公倍数を m とする。ただし，$n \geqq 2$ とする。次の問に答えよ。

(1) $m=2$ となる確率を求めよ。
(2) $m=4$ となる確率を求めよ。
(3) $m=6$ となる確率を求めよ。
(4) m がサイコロの出た目の 1 つと等しくなる確率を求めよ。

＜ '18 同志社大 ＞

【戦略】

(1) **3，4，5，6 のいずれかが出てしまったら一発アウトです。**

残った 1，2 の目だけ出続けるという事象を考えますが
全て 1 の目が出るという場合は除く必要があります。

(2) **3，5，6 が出た瞬間，一発アウトです**

したがって，1，2，4 の目が出続けるという事象を考えます。

ただし，4 が全く出ない（n 回とも 1 または 2 の目が出る）というケースは除く必要があります。

(3) **4，5 が出た瞬間，一発アウトです。**

したがって，1，2，3，6 の目が出続けるという事象を考えます。

$$\begin{cases} \text{6 が出た瞬間 } m=6 \text{ は確定} \\ \text{6 が出ないのであれば，2，3 は 1 回ずつは登場する必要がある} \end{cases}$$

という整理の仕方をすれば，6 の目が出るかどうかの場合分けになることが分かるでしょう。

(4) **$m=1$ で，出た目に 1 が含まれるというのは「全て 1」という 1 通り**

$m=2$ で，出た目に 2 が含まれるというのは (1) で考えたケースそのものです。

$m=3$ で，出た目に 3 が含まれるというのは (1) と同じ考え方なので，2^n-1 通り

$m=4$ で，出た目に 4 が含まれるというのは (2) で考えたケースそのものです。

$m=5$ で，出た目に 5 が含まれるというのは (1) と同じ考え方なので，2^n-1 通り

$m=6$ で，出た目に 6 が含まれるというのは (3) の場合分けの中で考えています。

【解答】

(1) $m=2$ とは

「n 回とも 1 または 2 の目が出る」という場合から

「n 回とも 1 の目が出る」という場合を除いたときに起こる。

よって，求める確率は $\dfrac{2^n-1}{6^n}$ …答

(2) $m=4$ とは

「n 回とも 1 または 2 または 4 の目が出る」という場合から

「n 回とも 1 または 2 の目が出る」という場合を除いたときに起こる。

よって，求める確率は $\dfrac{3^n-2^n}{6^n}$ …答

(3) $m=6$ となる場合について

(i) n 個の目の中に 6 の目が含まれるとき

「n 回とも 1，2，3，6 の目が出る」という場合から
「n 回とも 1，2，3 の目が出る」という場合を除く。

よって，$\dfrac{4^n-3^n}{6^n}$

(ii) n 個の目の中に 6 の目が含まれないとき

「n 回とも 1，2，3 の目が出る」という場合のうち

「n 回とも 1，3 の目が出る」…（事象 A と呼ぶ）
または
「n 回とも 1，2 の目が出る」…（事象 B と呼ぶ）

という場合を除く。

事象 A が起こる場合の数は 2^n 通り

事象 B が起こる場合の数は 2^n 通り

事象 $A \cap B$ が起こる場合の数は n 回とも 1 の目が出るという 1 通り

よって，$\dfrac{3^n-(2^n+2^n-1)}{6^n}=\dfrac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n}$

(i)，(ii) より，$m=6$ となる確率は

$$\frac{4^n-3^n}{6^n}+\frac{3^n-2^{n+1}+1}{6^n}=\frac{4^n-2^{n+1}+1}{6^n} \quad \cdots \text{答}$$

(4)　$m=1$ のときは n 回とも 1 が出るという 1 通りの出方がある。

$m=2$ のときは (1) で考えた 2^n-1 通り

$m=3$ について

「n 回とも 1 または 3 の目が出る」という場合から

「n 回とも 1 の目が出る」という場合を除いたときに起こる。

よって，2^n-1 通り

$m=4$ のときは (2) で考えた 3^n-2^n 通り

$m=5$ について

「n 回とも 1 または 5 の目が出る」という場合から

「n 回とも 1 の目が出る」という場合を除いたときに起こる。

よって，2^n-1 通り

$m=6$ のときは (3) の (i) で考えた 4^n-3^n 通り

以上から，

$$\frac{1+(2^n-1)\cdot 3+(3^n-2^n)+(4^n-3^n)}{6^n}=\frac{4^n+2^{n+1}-2}{6^n}\ \cdots 答$$

【総括】

どちらかと言うと「出たらマズイ目」に注目しながら考えます。

「この目が出たらまずいから，この目が出続ける『必要があるよね』」

というある意味必要条件を考えるわけです。

例えば，(1) は

「n 回とも 1，2 の目が出続ける必要があるよね」

と考えます。

ただ，n 回とも 1，2 の目が出続ければ『十分か』と言われるとそうではないでしょう。

全て 1 の目が出てしまうと困るので，それを除くわけです。

そういった意味で，必要性，十分性の両方を考えることが大切であるという教訓を含んでいるでしょう。