サイコロの出た目の最大公約数

n を 2 以上の自然数とする。1 個のサイコロを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

＜ '20 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **題意の最大公約数を G_n とします。**

$G_n=3$ **とは**

n **回とも 3 の倍数の目が出る場合から，n 回とも 6 の目が出る場合を除いたものです。**

(2) $G_n=k$ **となる確率を** p_k ($k=1,2,3,4,5,6$) **とします。**

p_6，p_5，p_4 **はすこぶる楽です。**

「n 回とも 6 の目が出る」
「n 回とも 5 の目が出る」
「n 回とも 4 の目が出る」

という明快な事象ですから。

p_3 **は (1) で求めています。**

残るは p_1，p_2 ですが，考えやすい方を求めて，残った方は余事象として処理します。

$G_n=1$ **ということを処理しようとするのは得策ではありません。**
というか直接求めることはできないでしょう。

なので，p_2 の方を直接求めることにします。

n **回とも 2，4，6 の目が出るという事象から**

n **回とも 4 の目が出る**（$G_n=4$ **となる**）
n **回とも 6 の目が出る**（$G_n=6$ **となる**）

という場合を除けばよいことになります。

【解答】

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数を G_n とする。

また，$G_n=k$ となる確率を p_k とする。($k=1,2,3,4,5,6$)

$G_n=3$ となるには，毎回 3 または 6 の目が出る必要がある。

ただし，n 回とも 6 の目が出ると $G_n=6$ となってしまう。

ゆえに，求める確率 p_3 は $p_3=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{2^n-1}{6^n}$ … 答

(2) p_6 は n 回とも 6 の目が出る確率で $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

p_5 は n 回とも 5 の目が出る確率で $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

p_4 は n 回とも 4 の目が出る確率で $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

p_3 は (1) から $p_3=\dfrac{2^n-1}{6^n}$

p_2 について

$G_n=2$ となるには，毎回 2 または 4 または 6 の目が出る必要がある

ただし，$\begin{cases} n \text{ 回とも 4 の目が出ると } G_n=4 \\ n \text{ 回とも 6 の目が出ると } G_n=6 \end{cases}$ となってしまう。

ゆえに，$p_2=\left(\dfrac{3}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{3^n-2}{6^n}$

p_1 について

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ であるため

$$\begin{aligned} p_1&=1-p_2-p_3-p_4-p_5-p_6 \\ &=\frac{6^n-(3^n-2)-(2^n-1)-1-1-1}{6^n} \\ &=\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n} \end{aligned}$$ … 答

【戦略 2】(2) について

$G_n=1$ となる確率だけは直接求めることができませんから，余事象で処理するとして，残りの事象を

$$\begin{cases} G_n=3 \text{ となる事象} \\ G_n=5 \text{ となる事象} \\ G_n=2 \text{ または } 4 \text{ または } 6 \text{ となる事象} \end{cases}$$

というように分けるとスマートです。

【解 2】(2) について

(1) より，$p_3=\dfrac{2^n-1}{6^n}$

p_5 は n 回とも 5 の目が出る確率で $\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

$G_n=2$ または 4 または 6 となる事象は

n 回とも偶数が出るという確率で $p_2+p_4+p_6=\left(\dfrac{3}{6}\right)^n$

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ であるため

$$\begin{aligned} p_1&=1-p_2-p_3-p_4-p_5-p_6 \\ &=1-p_3-p_5-(p_2+p_4+p_6) \\ &=\frac{6^n-(2^n-1)-1-3^n}{6^n} \\ &=\frac{6^n-3^n-2^n}{6^n} \cdots \text{答} \end{aligned}$$

【総括】

手ごろな難易度で，しっかりと差がつくでしょう。

「○○とは」と具体的にどのような事象が起こればよいかを噛み砕く力が必要です。

例えば (1) を考える際，計算用紙などに

3，3，6，3，…

などと「モデルケース」を考え，大切な根幹を抽出して一般論として結論付けるという態度が大切です。

・3，6 以外が出たらマズくね？
・全部 6 だとマズくね？

自分の「言いかえ（噛み砕き）」が適切かどうかを判断することについては，注意深く反例を探すクセをつける必要があると思います。