n 個の任意の実数 x_1，x_2，……，x_n に対して，下の不等式のいずれかが成立することを証明せよ。

$$|\sin x_1 \sin x_2 \cdots\cdots \sin x_n| \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$|\cos x_1 \cos x_2 \cdots\cdots \cos x_n| \leqq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

＜ ’03 名古屋大 ＞

【戦略 1】

「少なくとも 1 つどちらかが成り立つことを示す」と考えると，背理法を選択するのが自然です。

$$|\sin x_1 \sin x_2 \cdots\cdots \sin x_n| > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$|\cos x_1 \cos x_2 \cdots\cdots \cos x_n| > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

が成り立つと仮定すると

辺々かけ合わせることで，2 倍角公式から

$$\left| \frac{1}{2}\sin 2x_1 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x_2 \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{1}{2}\sin 2x_n \right| > \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

を得ます。

ここからは手なりに進めるでしょう。

【解 1】

題意の不等式がいずれも成り立たない，すなわち

$$|\sin x_1 \sin x_2 \cdots\cdots \sin x_n| > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \cdots ①$$

$$|\cos x_1 \cos x_2 \cdots\cdots \cos x_n| > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \quad \cdots ②$$

が同時に成り立つと仮定する。

①×②，及び 2 倍角の公式より

$$\left| \frac{1}{2}\sin 2x_1 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x_2 \cdot \cdots\cdots \cdot \frac{1}{2}\sin 2x_n \right| > \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n |\sin 2x_1 \cdot \sin 2x_2 \cdot \cdots\cdots \cdot \sin 2x_n| > \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$|\sin 2x_1 \cdot \sin 2x_2 \cdot \cdots\cdots \cdot \sin 2x_n| > 1 \quad \cdots (☆)$$

が成立する。

一方，

$$|\sin 2x_1| \leqq 1,\ |\sin 2x_2| \leqq 1,\ \cdots\cdots,\ |\sin 2x_n| \leqq 1$$

であるから，

$$|\sin 2x_1 \cdot \sin 2x_2 \cdot \cdots\cdots \cdot \sin 2x_n| \leqq 1 \quad \cdots (★)$$

(☆)，(★) は矛盾する。

以上から題意は示された。

【戦略 2】

対称性のある「積」について考えることを鑑みると，

相加平均・相乗平均の関係

をインスピレーションしても攻め落とすことができます。

その際，「和」が登場しますから，$\sin^2$，$\cos^2$ の形で相加平均・相乗平均の関係を用いるのがいいでしょう。

どちらかというと「やってみて，『あっ，いける』というタイプ」の発想でしょう。

【解 2】

$S_n=\sin x_1\cdot\sin x_2\cdot\cdots\cdots\sin x_n$

$C_n=\cos x_1\cdot\cos x_2\cdot\cdots\cdots\cdot\cos x_n$

目がチカチカするので置き換えて処理していきます。

とおく。

相加平均・相乗平均の関係から

$$\frac{\sin^2 x_1+\sin^2 x_2+\cdots\cdots+\sin^2 x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{\sin^2 x_1\cdot\sin^2 x_2\cdot\cdots\cdots\cdot\sin^2 x_n}$$

$$\frac{\cos^2 x_1+\cos^2 x_2+\cdots\cdots+\cos^2 x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{\cos^2 x_1\cdot\cos^2 x_2\cdot\cdots\cdots\cos^2 x_n}$$

辺々加えると

$$\frac{\overbrace{1+1+\cdots\cdots+1}^{n\text{ 個}}}{n}\geqq(S_n{}^2)^{\frac{1}{n}}+(C_n{}^2)^{\frac{1}{n}}$$

すなわち $(S_n{}^2)^{\frac{1}{n}}+(C_n{}^2)^{\frac{1}{n}}\leqq1$ を得る。

これより，$|S_n|^{\frac{2}{n}}+|C_n|^{\frac{2}{n}}\leqq1$ …(*)

ここで，$|S_n|^{\frac{2}{n}}>\frac{1}{2}$ かつ $|C_n|^{\frac{2}{n}}>\frac{1}{2}$ と仮定する。

すると，$|S_n|^{\frac{2}{n}}+|C_n|^{\frac{2}{n}}>1$ となり，(*) に矛盾する。

ゆえに，$|S_n|^{\frac{2}{n}}\leqq\frac{1}{2}$ または $|C_n|^{\frac{2}{n}}\leqq\frac{1}{2}$

すなわち $|S_n|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ または $|C_n|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ の少なくとも 1 つが成り立つ。

これは

$$|\sin x_1\sin x_2\cdots\cdots\sin x_n|\leqq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,\ |\cos x_1\cos x_2\cdots\cdots\cos x_n|\leqq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

のうち少なくとも 1 つが成り立つことを意味し，題意は示された。

【総括】

直接示すことは億劫であることを考えると，背理法でとどめをさすという路線は外したくありません。