a_1, a_2, a_3, ……, a_n を $0<a_i<1$ $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ である n 個の実数とするとき，次の不等式のうち少なくとも 1 つは成り立つことを示せ。

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n \leqq \frac{1}{2^n},\quad (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n) \leqq \frac{1}{2^n}$$

＜ '94 甲南大 ＞

【戦略】

例題同様に背理法を選択したいところです。

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n > \frac{1}{2^n} \quad \text{かつ} \quad (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n) > \frac{1}{2^n}$$

と仮定します。

登場人物は正の数なので，辺々かけあわせると

$$a_1(1-a_1)\cdot a_2(1-a_2)\cdot\cdots\cdots\cdot a_n(1-a_n) > \frac{1}{4^n}$$

ということになります。

$a_1(1-a_1)\times a_2(1-a_2)\times\cdots\cdots\times a_n(1-a_n)$ **と** $a_k(1-a_k)$ **という形で見れば**

$$(n\ \text{個の積}) > \overbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{4}}^{n\ \text{個の積}}$$

という形ですから

「各々の k で $a_k(1-a_k) \leqq \dfrac{1}{4}$ だったら矛盾するな」と目を光らせれば解決です。

【解答】

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n > \frac{1}{2^n} \quad \text{かつ} \quad (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n) > \frac{1}{2^n}$$

と仮定する。

双方左辺は正の数であり，辺々をかけあわせると

$$a_1(1-a_1)\cdot a_2(1-a_2)\cdot\cdots\cdots\cdot a_n(1-a_n) > \frac{1}{4^n} \quad \cdots①$$

一方，

$$a_1(1-a_1) = -\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$$
$$a_2(1-a_2) = -\left(a_2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$a_n(1-a_n) = -\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$$

であり，$0<a_i<1$ $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ という条件から，各々の左辺は正の値である。

ゆえに，辺々かけあわせると

$$a_1(1-a_1)\cdot a_2(1-a_2)\cdot\cdots\cdots\cdot a_n(1-a_n) \leqq \frac{1}{4^n}$$

となり，① に矛盾する。

以上から，

$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n \leqq \dfrac{1}{2^n}$ または $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_n) \leqq \dfrac{1}{2^n}$

が成り立ち，題意は示された。

【総括】

例題は $a_k+\dfrac{1}{a_k} \geqq 2$ (相加平均・相乗平均) という，割と個性が強めな形が決め手となりましたが，本問は

$$a_k(1-a_k) = -\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}$$

という平方完成が決め手となりました。

決して難問ではないと思いますが，例題に比べて急所に気づく匂いが弱いので，例題よりは差がつくかもしれません。