n 個の正の数 a_1，a_2，……，a_n がある。ただし，$n \geqq 2$ とする。

$$A = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \qquad B = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}$$

とおく。A，B の少なくとも一方は n より小さくないことを証明せよ。

＜ ’87 早稲田大 ＞

【戦略】

$A \geqq n$，または $B \geqq n$ であることを示すわけですが，直接証明する方針は見通しが悪そうです。

手なりに背理法を選択します。

$A < n$ かつ $B < n$ と仮定します。

辺々加えると相反式と呼ばれる形（$x + \dfrac{1}{x}$ という形）が見えます。

そうなると手なりに相加平均・相乗平均の利用が目論めます。

【解答】

$A < n$ かつ $B < n$ であると仮定する。

このとき，$A + B < 2n$ であるため

$$(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}\right) < 2n \quad \cdots ①$$

$a_k > 0$（$k = 1, 2, \cdots, n$）なので，相加平均・相乗平均の関係から

$$a_1 + \frac{1}{a_1} \geqq 2\sqrt{a_1 \cdot \frac{1}{a_1}} = 2$$

$$a_2 + \frac{1}{a_2} \geqq 2\sqrt{a_2 \cdot \frac{1}{a_2}} = 2$$

$$\vdots$$

$$a_n + \frac{1}{a_n} \geqq 2\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 2$$

辺々加えると

$$(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq 2n$$

となり，① に矛盾する。

よって，$A \geqq n$ または $B \geqq n$ であることが言え，題意は示された。

【総括】

ワンポイントレッスンのような問題でした。