　実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ がある。実数 α が $f(\alpha)=0$ をみたすとき，$|a|$，$|b|$，$|c|$ の最大値を M として，下の問いに答えよ。

(1)　$|\alpha|^3 \leqq M(|\alpha|^2+|\alpha|+1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$|\alpha|<M+1$ が成り立つことを示せ。

＜ ’04 東京学芸大 ＞

【戦略】

例題の流れを (1)，(2) に分けてくれています。

(2) がオチなわけですが，3 次方程式になるとますます α を直接求めてどうのこうの…という路線ではないでしょう。

当然最後は背理法で仕留めます。

(1) については例題と同じ考え方です。

【解答】

(1)　$f(\alpha)=0$ を満たすことから，$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$

つまり，$\alpha^3=-a\alpha^2-b\alpha-c$ であり，

$$\begin{aligned}|\alpha|^3&=|-a\alpha^2-b\alpha-c|\\&=|a\alpha^2+b\alpha+c|\end{aligned}$$

一般に $|x+y| \leqq |x|+|y|$ であり，$|x+y+z| \leqq |x|+|y|+|z|$ に注意する。

> $|X+Y| \leqq |X|+|Y|$ …(☆) において
> $X=x+y$，$Y=z$
> とすると
>
> $|x+y+z| \leqq |x+y|+|z|$
>
> (☆) より $|x+y| \leqq |x|+|y|$ だから
>
> $|x+y+z| \leqq |x|+|y|+|z|$

$$\begin{aligned}|\alpha|^3&\leqq |a\alpha^2|+|b\alpha|+|c|\\&=|a||\alpha|^2+|b||\alpha|+|c|\end{aligned}$$

M の定め方から，$|a| \leqq M$，$|b| \leqq M$，$|c| \leqq M$ であるため

$$\begin{aligned}|\alpha|^3&\leqq M|\alpha|^2+M|\alpha|+M\\&=M(|\alpha|^2+|\alpha|+1)\end{aligned}$$

となり，示された。

(2)　$|\alpha| \geqq M+1$ と仮定する。

このとき，$M \leqq |\alpha|-1$ であるため，(1) の不等式と併せて考えると

$$\begin{aligned}|\alpha|^3&\leqq (|\alpha|-1)(|\alpha|^2+|\alpha|+1)\\&=|\alpha|^3-1\end{aligned}$$

となり，矛盾する。

以上から，$|\alpha|<M+1$ が成立する。

【総括】

例題で 2 次，本問で 3 次とみてきましたが，一般の n 次でも考えてみます。

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ とする。
(ただし，a_0，a_1，a_2，… は実数で，$a_0 \neq 0$)
$|a_0|$，$|a_1|$，$|a_2|$，…，$|a_n|$ のうち最大のものを M とする。
このとき，$f(x)=0$ の解 α に対して

$$|\alpha|<1+\frac{M}{|a_0|}$$

この証明を類題２とします。