n 次方程式の解の限界【２次方程式 Ver】

　a，b は実数で $|a|>|b|$ であるとき，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解 α をもてば，$|\alpha|<|a|+1$ であることを証明せよ。

＜ ’75 早稲田大 ＞

【戦略】

α の正体は $\alpha=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であり，どう考えても直接触れたい形ではありません。

なので直接ではなく，間接的に証明する路線である背理法を考えていきます。

- **$|\alpha|\geqq|a|+1$ という仮定**
- **$|a|>|b|$ という条件**
- **$\alpha^2+a\alpha+b=0$ が成り立っている**

が手持ちの条件です。

まずは，$|\alpha|^2=|-a\alpha-b|$（$=|a\alpha+b|$）と見ます。

条件 $|a|>|b|$ を使おうと思うと，絶対値をばらそうという気持ちが芽生えてくるでしょう。

三角不等式

$$|x+y|\leqq|x|+|y|$$

（足してから絶対値をつけるより，絶対値を付けて符号を 0 以上にしてから足した方が大きい）

を用いて絶対値をバラしていけば，あとは手なりに進みます。

【解答】

$|\alpha|\geqq|a|+1$ であると仮定する。

α は $x^2+ax+b=0$ の解であるため，$\alpha^2+a\alpha+b=0$ すなわち

$$\alpha^2=-a\alpha-b$$

を満たしている。

一般に，$|x+y|\leqq|x|+|y|$ であることに注意すると

ゆえに，

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2&=|-a\alpha-b|\\
&=|a\alpha+b|\\
&\leqq|a\alpha|+|b|\\
&<|a||\alpha|+|a| \quad (\because \text{ 条件 } |a|>|b|)\\
&=|a|(|\alpha|+1)\\
&\leqq(|\alpha|-1)(|\alpha|+1) \quad (\because \text{ 仮定より } |a|\leqq|\alpha|-1)\\
&=|\alpha|^2-1
\end{aligned}$$

つまり，$|\alpha^2|<|\alpha|^2-1$ となり，矛盾する。

以上から，$|\alpha|<|a|+1$ が成立する。

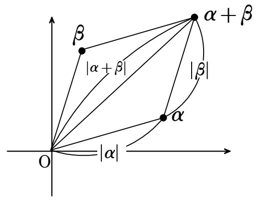
【総括】

古典的な内容であり，流れ的に少し独特な匂いを感じたことでしょう。

なお，この三角不等式は複素数に対しても成立し，複素数 α，β に対しても

$$|\alpha+\beta|\leqq|\alpha|+|\beta|$$

が成立します。



※ 三角不等式という言葉を学んだとき「何が三角やねん」と思っていた人もいるでしょうが，こうしてみると「名が体を表しているな」と思えるでしょう。

さて，そうしてみると，本問における「実数解」という設定は外しても本問の主張は通ることになります。

つまり，

> $x^2+bx+c=0$ の解を α とし，$\max(|b|,|c|)=M$ としたとき
> $$|\alpha|<M+1$$
> が成立する。（$\max(|b|,|c|)$ は，$|b|$，$|c|$ のうち小さくない方を表す）

ということが言えます。

【証明の概略】

$|\alpha|\geqq M+1$ と仮定する。

$\alpha^2+b\alpha+c=0$ より，

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2&=|-b\alpha-c|\\
&=|b\alpha+c|\\
&\leqq|b\alpha|+|c|\\
&\leqq M|\alpha|+M \quad (\because |b|\leqq M,\ |c|\leqq M)\\
&=M(|\alpha|+1)\\
&\leqq(|\alpha|-1)(|\alpha|+1)\\
&=|\alpha|^2-1
\end{aligned}$$

つまり，$|\alpha|^2<|\alpha|^2-1$ となり，矛盾する。

この３次方程式 Ver を類題として用意したので，確認に活用してみて下さい。