n 次方程式の解の限界【掛谷の定理】【類題３】

n を正の整数とする。a_0，a_1，…，a_n を正の定数として，n 次式 $f(x)$ を

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

と定める。

n 次方程式 $f(x)=0$ が実数解 $x=\alpha$ をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ とし，n 個の実数 t_1，t_2，…，t_n に対して，不等式

$$|t_1-t_2-t_3-\cdots-t_n|\geqq|t_1|-|t_2|-|t_3|\cdots-|t_n|$$

が成立することを証明せよ。

(2) $a_0\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ であるとき，不等式

$$|(\alpha-1)f(\alpha)|\geqq f(|\alpha|)\cdot(|\alpha|-1)$$

が成立することを証明せよ。

(3) $\dfrac{a_0}{a_1}$，$\dfrac{a_1}{a_2}$，$\dfrac{a_2}{a_3}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ のうち，最大のものを M，最小のものを m とするとき，不等式

$$m\leqq|\alpha|\leqq M$$

が成立することを証明せよ。