n を正の整数とする。a_0，a_1，…，a_n を正の定数として，n 次式 $f(x)$ を

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

と定める。

n 次方程式 $f(x)=0$ が実数解 $x=\alpha$ をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ とし，n 個の実数 t_1，t_2，…，t_n に対して，不等式

$$|t_1-t_2-t_3-\cdots-t_n|\geqq|t_1|-|t_2|-|t_3|\cdots-|t_n|$$

が成立することを証明せよ。

(2) $a_0\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$ であるとき，不等式

$$|(\alpha-1)f(\alpha)|\geqq f(|\alpha|)\cdot(|\alpha|-1)$$

が成立することを証明せよ。

(3) $\dfrac{a_0}{a_1}$，$\dfrac{a_1}{a_2}$，$\dfrac{a_2}{a_3}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ のうち，最大のものを M，最小のものを m とするとき，不等式

$$m\leqq|\alpha|\leqq M$$

が成立することを証明せよ。

【戦略】

(1) **三角不等式の引き算 Ver です。**

基本的に 2 個でできれば，3 個でもでき，4 個でもでき，… という帰納的な構造なので，帰納法で示すのが普通かなと思います。

(2) $(\alpha-1)f(\alpha)$ **をまずは計算するわけですが，同じ項をそろえるように工夫して見やすくかくと分かりやすいと思います。**

(1) **の不等式を利用すれば手なりに結論まで辿り着けるはずです。**

(3) **まず，$f(x)=0$ の実数解があるとしたら，それは負の解です。**

なぜなら，$f(x)=0$ は各係数が正の方程式なので，実数解 α が $\alpha\geqq 0$ だと $f(\alpha)>0$ となってしまい，$f(\alpha)=0$ に反するからです。

したがって実数解 α について $\alpha<0$ です。

$f(|\alpha|)=f(-\alpha)$ **で $-\alpha>0$ なので，それを代入した $f(-\alpha)$ について $f(-\alpha)>0$ となります。**

このことから，$f(|\alpha|)>0$ であることが分かります。

(2) **の結果もあわせて考えると $|\alpha|\leqq 1$ であることも言えます。**

$a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n$ **の場合，$|\alpha|\leqq 1$ であることが言えたのです。**

じゃあ $a_0\geqq a_1\geqq\cdots\geqq a_n$ の場合も同じ要領で $|\alpha|\geqq 1$ が言えるはずです。

そうなってくると，$x=\dfrac{\alpha}{M}$ や $x=\dfrac{\alpha}{m}$ を解にもつ n 次方程式について考えたくなるでしょう。

そこで，$g(x)=f(Mx)$，$h(x)=f(mx)$ という設定に流れていけばしめたものです。

【解答】

(1) まず，一般的に実数 a，b に対して，

$$|a+b|\leqq|a|+|b|$$

であることを証明する。（補題）

これは示すべき両辺が 0 以上の値であることから，

$$|a+b|^2\leqq(|a|+|b|)^2$$

を示せばよい。

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=a^2+2|ab|+b^2-(a+b)^2=2(|ab|-ab)\geqq 0\quad(\because |ab|\geqq ab)$$

より示された。

これを踏まえて，

$$|t_1-t_2-t_3-\cdots-t_n|\geqq|t_1|-|t_2|-|t_3|\cdots-|t_n|\cdots(☆)$$

を n に関する数学的帰納法で証明する。

(i) $n=2$ のとき

補題より，$|t_1|=|(t_1-t_2)+t_2|\leqq|t_1-t_2|+|t_2|$ であるから，移項して $|t_1-t_2|\geqq|t_1|-|t_2|$

よって，$n=2$ のとき (☆) は成り立つ。

(ii) $n=2$，3，…，k のときに，

$$|t_1-t_2-t_3-\cdots-t_n|\geqq|t_1|-|t_2|-|t_3|\cdots-|t_n|$$

が成立すると仮定する。

このとき，

$$\begin{aligned}|t_1-t_2-\cdots-t_k-t_{k+1}|&=|(t_1-t_2-\cdots-t_k)-t_{k+1}|\\&\geqq|t_1-t_2-\cdots-t_k|-|t_{k+1}|\quad(\because n=2\text{ のとき成立})\end{aligned}$$

さらに，帰納法の仮定から

$$|t_1-t_2-\cdots-t_k|-|t_{k+1}|\geqq|t_1|-|t_2|-\cdots-|t_k|-|t_{k+1}|$$

したがって，

$$|t_1-t_2-t_3-\cdots-t_k-t_{k+1}|\geqq|t_1|-|t_2|-|t_3|\cdots-|t_k|-|t_{k+1}|$$

が成り立ち，$n=k+1$ のときも(☆) は成立する。

以上 (i)，(ii)から題意は示された。

© MathClinic

(2)

$$\alpha f(\alpha)= \qquad a_0\alpha+a_1\alpha^2+a_2\alpha^3+\cdots+a_{n-1}\alpha^n+a_n\alpha^n \quad \cdots ①$$
$$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+\cdots+a_n\alpha^n \quad \cdots ②$$

①−② より

$$(\alpha-1)f(\alpha)=a_n\alpha^n-(a_n-a_{n-1})\alpha^n-\cdots-(a_2-a_1)\alpha^2-(a_1-a_0)\alpha-a_0$$

両辺絶対値をとって，(1) の結果を用いると

$$|(\alpha-1)f(\alpha)|\geqq|a_n\alpha^{n+1}|-|(a_n-a_{n-1})\alpha^n|-\cdots-|(a_1-a_0)\alpha|-|a_0|$$

$$=a_n|\alpha|^{n+1}-(a_n-a_{n-1})|\alpha|^n-\cdots-(a_1-a_0)|\alpha|-a_0 \quad (\because 0<a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n)$$

$$=|\alpha|\{a_n|\alpha|^n+a_{n-1}|\alpha|^{n-1}+\cdots+a_1|\alpha|+a_0\}-\{a_n|\alpha|^n+a_{n-1}|\alpha|^{n-1}+\cdots+a_1|\alpha|+a_0\}$$

$$=|\alpha|f(|\alpha|)-f(|\alpha|)$$

$$=f(|\alpha|)(|\alpha|-1)$$

(3) $f(\alpha)=0$ に注意すると，(2) の結果から，$f(|\alpha|)(|\alpha|-1)\leqq 0$ であり，$f(|\alpha|)>0$ であるので，$|\alpha|-1\leqq 0$

すなわち $|\alpha|\leqq 1$

一方，$a_0\geqq a_1\geqq\cdots\geqq a_n$ のとき，
$$|(1-\alpha)f(\alpha)|\geqq f(|\alpha|)\cdot(1-|\alpha|)$$
である。

これは (2) と同様に ②−① を計算して両辺絶対値をとり，
(1) の不等式を用いて整理すれば示すことができる。

これより，$f(\alpha)=0$ に注意すると，$f(|\alpha|)(1-|\alpha|)\leqq 0$ であり，
$f(|\alpha|)>0$ であるので，$1-|\alpha|\leqq 0$

すなわち，$|\alpha|\geqq 1$

まとめると，
$$a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n \text{ のとき，} |\alpha|\leqq 1 \cdots (*)$$
$$a_0\geqq a_1\geqq\cdots\geqq a_n \text{ のとき，} |\alpha|\geqq 1 \cdots (*)'$$

ここで，$g(x)=f(Mx)$ という多項式 $g(x)$ を考える。

$$g(x)=a_0+a_1Mx+a_2M^2x^2+\cdots+a_nM^nx^n$$

M の定め方から，$g(x)$ の係数について，

$$a_0\leqq a_1M\leqq a_2M^2\leqq\cdots\leqq a_nM^n$$

注意：$\dfrac{a_0}{a_1}\leqq M$ より，$a_0\leqq a_1M$，

$\dfrac{a_1}{a_2}\leqq M$ より，$\dfrac{a_1}{a_2}\leqq\dfrac{M^2}{M}$ で，$a_1M\leqq a_2M^2$

と以下同様に考えればよい。

また，$g\left(\dfrac{\alpha}{M}\right)=f\left(M\cdot\dfrac{\alpha}{M}\right)=f(\alpha)=0$ より，$g(x)=0$ は $x=\dfrac{\alpha}{M}$ を解にもつ。

ゆえに，$\beta=\dfrac{\alpha}{M}$ と定めると，β は $g(x)=0$ の実数解であり，
$(*)$ から $|\beta|\leqq 1$

よって，$|\alpha|=|\beta M|=M|\beta|\leqq M$ となり，$|\alpha|\leqq M$

同様にして，$h(x)=f(mx)$ という多項式 $h(x)$ を考える。

$$h(x)=a_0+a_1mx+a_2m^2x^2+\cdots+a_nm^nx^n$$

m の定め方から，$h(x)$ の係数について，

$$a_0\geqq a_1m\geqq a_2m^2\geqq\cdots\geqq a_nm^n$$

また，$h\left(\dfrac{\alpha}{m}\right)=f\left(m\cdot\dfrac{\alpha}{m}\right)=f(\alpha)=0$ より，$h(x)=0$ は $x=\dfrac{\alpha}{m}$ を解にもつ。

ゆえに，$\gamma=\dfrac{\alpha}{m}$ と定めると，γ は $h(x)=0$ の実数解であり，
$(*)'$ から $|\gamma|\geqq 1$

よって，$|\alpha|=|\gamma m|=m|\gamma|\geqq m$ となり，$|\alpha|\geqq m$

以上から，$m\leqq|\alpha|\leqq M$ が成立する。

© MathClinic

【総括】

⑵ は一見ムムっと思う形ですが，左辺は全体に絶対値がかかっており，右辺は部分部分に絶対値がついていることから ⑴ の不等式を用いることを発想するのはそこまで無茶ではないでしょう。

下手に $f(\alpha)=0$ として，示すべき不等式の左辺を 0 としてしまうと，かえって見えなくなってしまいます。

$f(\alpha)=0$ が効いてくるのは ⑶ です。あえて問題文の形で問いかけている所に思いやりを感じてほしいです。

⑶ は難しいでしょう。
当然，前問までの流れを上手く使うことを考えなければなりません。

まず，⑵ の左辺が 0 であることから，$|\alpha|\leqq 1$ でなければならないことが分かります。(ここまでは無理なく思いつけるはず)

ここから，$|\alpha|\leqq M$ と結びつけるわけなのですから，逆算すれば，

$$\left|\frac{\alpha}{M}\right|\leqq 1$$

が証明したいのですね。

そう考えると，$\dfrac{\alpha}{M}$ を解にもつような n 次方程式を考えることになるわけです。

そこまで考えられればしめたもので，$g(x)=f(Mx)$ と設定すれば，
$g\left(\dfrac{\alpha}{M}\right)=f(\alpha)=0$ なので，$\dfrac{\alpha}{M}$ を解にもつ n 次方程式を作り出すことができ，あとは係数の単調性を調べるのは自然の流れでしょう。

これにて解答のように $|\alpha|\leqq M$ というように，$|\alpha|$ を上から押さえることに成功します。

下からも押さえたいので，これまでの流れを全て逆にして考えればいいだけです。
(解答は記述でまとめるために多少順番が前後していますが，頭の中の流れは今述べたようになります)

【 掛谷の定理 】

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ が実数解 α をもつとする。

$0<a_0\leqq a_1\leqq\cdots\leqq a_n$ のとき，$|\alpha|\leqq 1$

$a_0\geqq a_1\geqq\cdots\geqq a_n>0$ のとき，$|\alpha|\geqq 1$

解答の $(*)$，$(*)'$ にあたる部分は「掛谷の定理」と呼ばれている定理です。

本問の ⑶ は掛谷の定理の系であり，n 次方程式の実数解が係数の比率を用いて評価できるという有用な式です。

© MathClinic