a_0，a_1，a_2，$\cdots$ は実数で，$a_0 \neq 0$ とし，

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

を考える。

$|a_0|$，$|a_1|$，$|a_2|$，$\cdots$，$|a_n|$ のうち最大のものを M とする。

このとき，$f(x)=0$ の解 α に対して

$$|\alpha|<1+\frac{M}{|a_0|}$$

であることを証明せよ。

【戦略】

例題，類題のシナリオと同じです。

【解答】

$|\alpha| \geqq 1+\dfrac{M}{|a_0|}$ と仮定する。

$f(\alpha)=0$ より $a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0$

$a_0 \neq 0$ より，$\alpha^n+\dfrac{a_1}{a_0}\alpha^{n-1}+\dfrac{a_2}{a_0}\alpha^{n-2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_0}\alpha+\dfrac{a_n}{a_0}=0$

移項して三角不等式を用いると

$$|\alpha|^n \leqq \frac{|a_1|}{|a_0|}|\alpha|^{n-1}+\frac{|a_2|}{|a_0|}|\alpha|^{n-2}+\cdots+\frac{|a_{n-1}|}{|a_0|}|\alpha|+\frac{|a_n|}{|a_0|}$$

M の定め方から

$$\begin{aligned}|\alpha|^n &\leqq \frac{M}{|a_0|}|\alpha|^{n-1}+\frac{M}{|a_0|}|\alpha|^{n-2}+\cdots+\frac{M}{|a_0|}|\alpha|+\frac{M}{|a_0|}\\ &=\frac{M}{|a_0|}\left(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+|\alpha|+1\right)\end{aligned}$$

仮定から，$\dfrac{M}{|a_0|} \leqq |\alpha|-1$ であり，

$$\begin{aligned}|\alpha|^n &\leqq (|\alpha|-1)\left(|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots+|\alpha|+1\right)\\ &=|\alpha|^n-1\end{aligned}$$

となり，矛盾する。

【総括】

n 次方程式の解の限界が分かるという点で，本問の主張は多少なりとも有用性があることが分かるでしょう。

なお，本問に関連する話題として

「掛谷 (かけや) の定理」

というものを紹介します。

【 掛谷の定理 】

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ が実数解 α をもつとする。

$0<a_0 \leqq a_1 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，$|\alpha| \leqq 1$

$a_0 \geqq a_1 \geqq \cdots \geqq a_n>0$ のとき，$|\alpha| \geqq 1$

これを少し発展させると次のような主張が言えます。

【掛谷の定理の系】

a_0，a_1，$\cdots$，a_n を正の定数として，n 次式 $f(x)$ を

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

と定め，n 次方程式 $f(x)=0$ が実数解 $x=\alpha$ をもつときを考える。

$\dfrac{a_0}{a_1}$，$\dfrac{a_1}{a_2}$，$\dfrac{a_2}{a_3}$，$\cdots$，$\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ のうち，最大のものを M，最小のものを m とするとき，不等式

$$m \leqq |\alpha| \leqq M$$

が成り立つ。

この証明を誘導付きにして，最後の類題３とします。

© MathClinic