Oを原点とする座標平面に点 A$(2, 1)$ と点 B$(1, -2)$ をとる。
実数 θ（$0 \leqq \theta < 2\pi$）に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を満たすものとする。

(1) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす値をとって変化するとき，点Pの軌跡を求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ。

＜ '13 同志社大 ＞

【戦略 1】

(1) **軌跡の基本問題です。Pの軌跡を求めるので，P(X, Y) とおいて，X, Y の関係式を Get しにいくことになります。**

その際，X, Y が $\sin\theta$, $\cos\theta$ を含む式になっているので，ここから θ を消去しようと思ったら，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して θ を消去することになります。経験がものをいう典型問題です。

(2) **$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ という内積の最大値を考えることになります。**

多くの人にとって内積というのは何を表しているのかがパッと分かる図形量ではありません。

よく分からなくなったときほど基本に立ち返ります。

ベクトルの基本は
「1つの始点，2つの基底（主役のベクトル）」
という考え方です。

特に今回「どの点を始点に取るのか」を考えたとき，(1)の結果から点Pの軌跡が点Bを中心とする半径 $\sqrt{5}$ の円であることをボーッと見過ごしてはいけません。

Bという円の中心を始点にとれば色々都合がよさそうだという戦略の下で式変形して話を進めていくことができればスムーズに流れていくでしょう。

【解 1】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + (1-\sin\theta)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos\theta - \sin\theta + 1\\ \cos\theta + 2\sin\theta - 2\end{pmatrix}$

P(X, Y) とすると，$\begin{cases} X = 2\cos\theta - \sin\theta + 1 \\ Y = \cos\theta + 2\sin\theta - 2 \end{cases}$

これら2式から

$$\sin\theta = \frac{1}{5}(-X+2Y+5), \quad \cos\theta = \frac{1}{5}(2X+Y) \quad \cdots (*)$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，$\frac{1}{25}(-X+2Y+5)^2 + \frac{1}{25}(2X+Y)^2 = 1$

これを整理すると，$5X^2 + 5Y^2 - 10X + 20Y = 0$

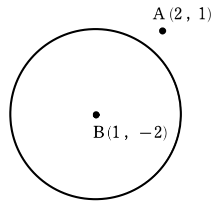
すなわち $X^2 + Y^2 - 2X + 4Y = 0$

よって，$(X-1)^2 + (Y+2)^2 = 5$

したがって，点P の軌跡は

円 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ … 答

(2) (1)より，点Pの軌跡は中心がB$(1, -2)$，半径が $\sqrt{5}$ の円である。



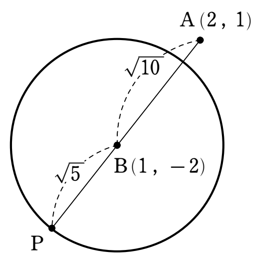
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{BA}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}}) \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{BP}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= 5 - \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ が最小になれば $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は最大となる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= |\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\alpha \quad (\alpha \text{ は } \overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BP}} \text{ のなす角}) \\ &= 5\sqrt{2}\cos\alpha\end{aligned}$$

これが最小となるとき，$\alpha = \pi$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = 5 + 5\sqrt{2}$



さらに，このとき

$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(*) に代入すると，

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{1}{5}\left\{ -\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 5 \right\} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{5}\left\{ 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{-3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right\} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

これを満たす $\theta\,(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

以上から $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は最大値 $5+5\sqrt{2}$ をとる。 …答

【戦略 2】

先ほど【戦略 1】で「多くの人にとって内積というのは何を表しているのかがパッと分かる図形量ではありません」と述べましたが，内積の

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

という定義を考えれば

「同じ向きに重なるとき ($\theta=0$ のとき) が最大)」，
「逆向きに重なるとき ($\theta=\pi$ のとき) が最小」

という直感をはたらかせることは無理ではないはずです。

ただし，これはあくまで直感であり，さらに大きさが固定されている場合の話です。

$|\vec{a}|$ や $|\vec{b}|$ という大きさまでもが変化しながら動くときは図形的にどうこうできるレベルではありませんから，式的処理を考えることになります。

【解 1】の方は始点を B にとってこの直感を「幾何的に」説明しましたが，ここでは $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を何か変数を用いて「関数化」して最大値を捉えることにします。

今回は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を θ を用いて表せそうなので，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を θ の関数と見てその最大値を考えることにします。

その際に闇雲に計算するのではなく，手際よく処理していきましょう。
最初の

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

という意味ありげな設定をうまいこと活かしながら $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を計算していきましょう。

特に，今回は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ という設定になっていることも見逃したくはありません。

そこで $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ という２つの基底で表すというシンプルな作戦をとってみます。

【解 2】

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PA}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \left\{ (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\} \\ &= (1-\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - (1-\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \left\{ (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\} \\ &= -(\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \end{aligned}$$

(以下簡単のため，$\cos\theta = c$，$\sin\theta = s$ と表す。)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= \left\{ (1-c)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} - (1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\}\cdot\left\{ -c\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\} \\ &= -c\,(1-c)\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \{ s\,(1-c) + c\,(1-s) \}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - s\,(1-s)\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= 5c\,(c-1) - 5s\,(1-s) \\ &= 5c^2 - 5c - 5s + 5s^2 \\ &= -5(s+c) + 5 \quad (\because\ s^2 + c^2 = 1) \end{aligned}$$

ゆえに，
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= -5(\sin\theta + \cos\theta) + 5 \\ &= -5\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 5 \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$ より，$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$，

すなわち $\theta = \dfrac{5}{4}\pi$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は最大値 $5+5\sqrt{2}$ …答

【総括】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について例題同様に考えてみます。

$\theta = -\theta'$ と置きなおすことにより

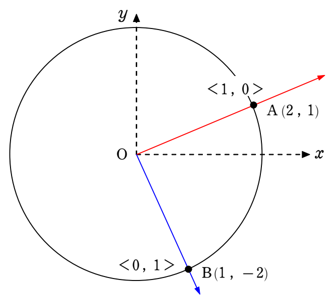
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta')\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\sin\theta')\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となります。

一旦 $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = (\cos\theta')\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\sin\theta')\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定まる点 P′ を考えると
P′ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を新たな横軸，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を新たな縦軸とみた座標系における

$$\langle \cos\theta',\ \sin\theta' \rangle$$

という斜交座標で与えられる点です。

※ 元々の座標系で見た座標は (☆，★)，新たな座標系で見た座標は
＜☆，★＞ と区別することにします。



ゆえに，P′ ＜ $\cos\theta'$，$\sin\theta'$ ＞ の軌跡は ＜1，0＞，＜0，1＞を基準とした座標系における単位円です。($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交していることに注意)

それを元の座標系で読み替えると，$x^2 + y^2 = 5$ ということになり，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，この円を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 方向 $\left(\begin{cases} x \text{ 軸方向に } 1 \\ y \text{ 軸方向に } -2 \end{cases}\right)$ に平行移動した $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ ということになります。