

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件

$$(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たすとする。

- (1) 2つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は垂直であることを証明せよ。
- (2) $|\overrightarrow{CA}|, |\overrightarrow{CB}|$ を θ を用いて表せ。
- (3) 三角形 ABC の周の長さ $AB+BC+CA$ を最大にする θ を求めよ。
< '12 広島大 >

【戦略】

- (1) もちろん $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ を目指します。

$$(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} \text{ として,}$$

$$|(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB}|^2 = |-\overrightarrow{OC}|^2$$

と見てやることにより, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を登場させます。

大きさについての処理は $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ という条件があるため, 問題ありません。

- (2) ベクトルの基本「1つの始点, 2つの基底」という言葉に従い

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (1 + \cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = (\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (1 + \sin \theta)\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で表現します。

もちろん, 一旦は $|\overrightarrow{CA}|^2, |\overrightarrow{CB}|^2$ という 2 乗計算を考えます。

手なりに計算を進めると, $|\overrightarrow{CA}|^2 = 2(1 + \cos \theta)$ となります。

$|\overrightarrow{CA}|$ とするには $\sqrt{\quad}$ をかぶせますから, 常套手段である半角公式 $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ の分母を払った形で

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

と見てやります。

$|\overrightarrow{CB}|^2 = 2(1 + \sin \theta)$ で, こちらは少しヒヤッとします。

$1 + \cos$ の形に対して半角を使って次数を上げることで $\sqrt{\quad}$ を外すということは常套手段ですが, $1 + \sin$ に対しては差が付くでしょう。

$1 + \sin \theta = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ と無理やり $1 + \cos$ の形で見ます。

- (3) (2) をクリアすれば, $L = AB + BC + CA$ として

$$L = 2 + 2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \text{ と立式できます。}$$

ここから L の最大を捉えるにあたり, 2カ所で動く θ を 1カ所に集める常套手段である和積公式を用いて処理します。

【解答】

- (1) $(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$ より

$$|(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB}|^2 = |-\overrightarrow{OC}|^2$$

$$(\cos^2 \theta)|\overrightarrow{OA}|^2 + 2 \sin \theta \cos \theta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (\sin^2 \theta)|\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$$

A, B, C は O を中心とする半径 1 の円周上の点なので

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \dots \textcircled{1} \text{ であり}$$

$$\cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ なので, } 2 \sin \theta \cos \theta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\sin 2\theta \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

条件 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < 2\theta < \pi$ であり, $0 < \sin 2\theta \leq 1$ だから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \dots \textcircled{2} \text{ であり, } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ は垂直である。}$$

- (2) $\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OA} + (\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} \\ &= (1 + \cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} \end{aligned}$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA}|^2 &= |(1 + \cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= 2(1 + \cos \theta) \\ &= 2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ &= 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \theta > 0$ であるから, $|\overrightarrow{CA}| = 2 \cos \frac{\theta}{2} \dots \textcircled{3}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{OB} + (\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (\sin \theta)\overrightarrow{OB} \\ &= (\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (1 + \sin \theta)\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CB}|^2 &= |(\cos \theta)\overrightarrow{OA} + (1 + \sin \theta)\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2 \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= 2(1 + \sin \theta) \\ &= 2 \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right\} \\ &= 2 \cdot 2 \cos^2 \frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2} \\ &= 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ で, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) > 0$ なので

$$|\overrightarrow{CB}| = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \dots \textcircled{4}$$

(3) $AB+BC+CA=L$ とする。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 2 \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \end{aligned}$$

(2) の結果も踏まえると

$$\begin{aligned} L &= 2 + 2 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 + 2 \left\{ \cos \frac{\theta}{2} + \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \\ &= 2 + 2 \cdot 2 \cos \frac{\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{2} \cos \frac{\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{2} \\ &= 2 + 4 \cos \frac{\pi}{8} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $-\frac{\pi}{8} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{8}$ なので, $\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 1$ は実現可能であり, そのときの θ は $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} = 0$ を満たし, $\theta = \frac{\pi}{4}$

このとき, L は最大となる。

ゆえに, $\theta = \frac{\pi}{4}$ で L は最大となる。… 罫

【戦略2】(2) について

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので, 幾何的に考えてもよいでしょう。

円周角の定理が効いてくることになります。

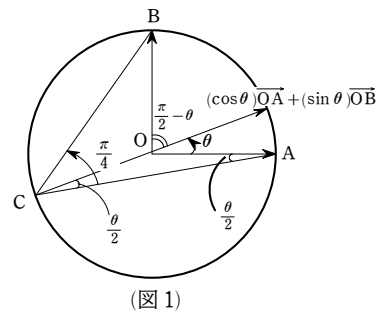
【解2】(2) について

(1) 及び円周角の定理より

(図1) のようになる。

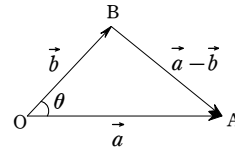
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA}| &= \left(OC \cos \frac{\theta}{2} \right) \times 2 \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \quad \dots \text{罫} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CB}| &= \left\{ OC \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \times 2 \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad \dots \text{罫} \end{aligned}$$



【総括】

3点 O, A, B に対して, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ としたとき, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$ です。



\vec{a}, \vec{b} の θ なす角をとしたとき, 余弦定理から

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

であり, 内積の定義 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ から

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

を得ます。

何が言いたいかというと, ベクトルの2乗展開を考えるということは

「あなたは余弦定理を使っている」

ということです。

今まで, なんとなく「2乗すればうまくいくんでしょ」と思っていた人はうまくいく必然性をかみしめてください。

なお, $\overrightarrow{OP} = (\cos\theta)\overrightarrow{OA} + (\sin\theta)\overrightarrow{OB}$ という形について少し考察してみます。

【検証】

一般に2定点 A, B に対して $\vec{OP} = (\cos\theta)\vec{OA} + (\sin\theta)\vec{OB}$ となる点 P の軌跡を考えてみます。

普段我々は $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ という2本の単位ベクトルを基にした「直交座標」を用いています。

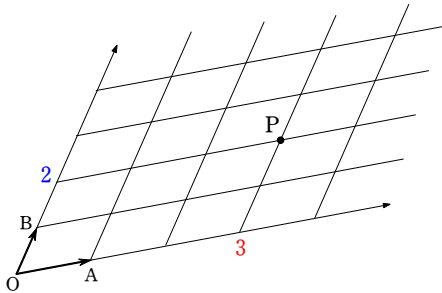
例えば、 $\vec{OP} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ の場合、P(3, 2) となります。

つまり、係数が座標とリンクします。

$\vec{OP} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ であれば、 \vec{OA}, \vec{OB} という2本のベクトルを基にした斜交座標における P(a, b) に対応します。

※ 直交座標と区別するために $\langle a, b \rangle$ と表現することにします。

例えば、 $\vec{OP} = 3\vec{OA} + 2\vec{OB}$ であれば P(3, 2) に対応します



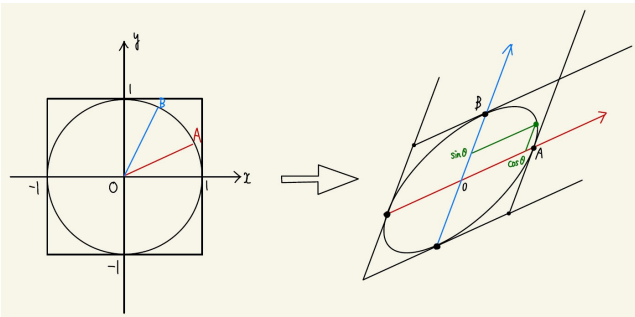
さて、本問のように、原点中心半径1の円周上の2点 A, B に対して

$\vec{OP} = (\cos\theta)\vec{OA} + (\sin\theta)\vec{OB}$ という形(1次結合)で与えられる点 P を考えてみます。

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ としてみます。

\vec{OA}, \vec{OB} の1次結合を考えるということはいわば、 \vec{OA}, \vec{OB} 基本とする座標変換を考えるわけで、以下のようなイメージになります。

(本当は行列の1次変換についての基本があるとスムーズなのですが)



点 P(x, y) が斜交座標 $\langle X, Y \rangle$ に対応するときを考えます。

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \left(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{一方, } \vec{OP} = X\vec{OA} + Y\vec{OB} = X \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

なので、 $\begin{cases} x = X\cos\alpha + Y\cos\beta \\ y = X\sin\alpha + Y\sin\beta \end{cases}$ を得ます。

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ であるとき } (X\cos\alpha + Y\cos\beta)^2 + (X\sin\alpha + Y\sin\beta)^2 = 1 \text{ で}$$

これを整理すると、 $X^2 + Y^2 + 2XY\cos(\beta - \alpha) = 1$ となります。

つまり、A, B に対して、何も制限をかけずに座標変換した場合、新たな斜交座標系において $\langle X, Y \rangle$ の集合が表す図形は楕円ということになります。

さて、今、 $\vec{OP} = (\cos\theta)\vec{OA} + (\sin\theta)\vec{OB}$ で与えられる点 P に対して

$\vec{OC} = -\vec{OP}$ となるような点 C を考えます。

点 P は一般的に楕円上なので、 $|\vec{OC}| (= |\vec{OP}|) = 1$ とはなりません。

本問で与えられている

$$\text{任意の点 C に対して } |\vec{OC}| = 1 \text{ となる } \dots (*)$$

という条件を加味することになります。

つまり、座標変換後の $X^2 + Y^2 + 2XY\cos(\beta - \alpha) = 1$ という方程式が表す図形が円であればよいわけです。

ただ、斜交座標(斜めっている X 軸, Y 軸における座標系)において円を表す方程式がこういった形なのかについては自明ではありません。

(あくまで直交座標において $X^2 + Y^2 = \square$ という形になるのであって斜交座標において $X^2 + Y^2 = \square$ となればよいとするのは勇み足です。)

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + Y\cos\beta \\ y = X\sin\alpha + Y\sin\beta \end{cases} \text{ について、これを } X, Y \text{ について解いてやります。}$$

この計算は億劫ですが、頑張ると

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} (x \sin\beta - y \cos\beta) \\ Y = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} (-x \sin\alpha + y \cos\alpha) \end{cases}$$

となり、 $\vec{OP} = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} x \sin\beta - y \cos\beta \\ -x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{pmatrix}$ となるため

$$\vec{OC} = -\vec{OP} = \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} -x \sin\beta + y \cos\beta \\ x \sin\alpha - y \cos\alpha \end{pmatrix}$$

を得ることになります。

$|\overrightarrow{OC}|^2 = |-\overrightarrow{OP}|^2 = 1$ が任意の P に対して成立することになり

$$(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)x^2 - 2xy(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta) + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta)y^2 = (\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)^2 \dots \textcircled{1}$$

となります。

① が表す図形が円 $x^2 + y^2 = 1$ であればよいわけです。

※ 安易に係数比較をするわけにもいきません。

① を満たす (x, y) 集まれと呼びかけたときに $(1, 0)$ が入ってこないとおかしいですね。

全称命題の考え方です。

よって、

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\beta\cos^2\alpha + \cos^2\beta\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\sin^2\alpha(1 - \cos^2\beta) + \sin^2\beta(1 - \cos^2\alpha) = -2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\beta\sin^2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$2\sin^2\alpha\sin^2\beta = -2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = 0$$

$$\cos(\beta - \alpha) = 0$$

となり、 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} のなす角 $\beta - \alpha$ について $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ となるため、

\overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} は直交します。

逆にこのとき

① の左辺は

$$\begin{aligned} & (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)x^2 - 2xy(\sin\alpha\cos\alpha + (\pm\cos\alpha)(\mp\sin\alpha)) + (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) \\ & = x^2 + y^2 \text{ (複号同順)} \end{aligned}$$

① の右辺は

$$\{(\pm\cos\alpha)\cos\alpha - (\mp\sin\alpha)\sin\alpha\}^2 = (\pm 1)^2 = 1 \text{ (複号同順)}$$

となり、① は $x^2 + y^2 = 1$ を表します。