n を 100 より小さい自然数とする。 2^n の最高位の数字が 7 となるような n を全て求めよ。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}7=0.8451$ とする。

＜ '94 上智大 ＞

【戦略】

$$2^n=\overbrace{7***\cdots*}^{k\text{桁}}$$

というシチュエーションを立式していきます。

$$7\cdot 10^{k-1}\leqq 2^n<8\cdot 10^{k-1}$$

から出発し，辺々常用対数をとって整理すると

$$(k-1)+0.8451\leqq 0{,}3010\,n<(k-1)+0.9030 \quad\cdots(*)$$

まで整理できます。

n **は高々 2 桁の自然数なので，** $n=10a+b$ **と直接的に表現してしまいます。**

そうなると

$$\begin{aligned}0.3010\,n&=\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{1000}\right)(10a+b)\\&=3a+\frac{3}{10}b+\frac{1}{100}a+\frac{1}{1000}b\end{aligned}$$

ということになります。

$(*)$ **から小数部分が** $0.8451\sim 0.9030$ **の間でおさまっていることを考えると** $0.3010n$ **の小数第 1 位の数の命運を握っている**

$$\frac{3}{10}b$$

について調べたくなります。

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3b$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$\frac{3}{10}b$	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7

という表を作ってしまえば， $0.3010n$ **の小数第 1 位が 8 または 9 となっている**

$$b=3 \text{ または } b=6$$

ということで， n **の 1 の位が 3 か 6 ということが分かりました。**

ここまでくれば，あとはそれぞれのケースの個別検証をすればよく，手なりに進みます。

【解答】

$$2^n=\overbrace{7***\cdots*}^{k\text{桁}}$$

とすると

$$7\cdot 10^{k-1}\leqq 2^n<8\cdot 10^{k-1}$$

辺々常用対数をとって，$\log_{10}(7\cdot 10^{k-1})\leqq\log_{10}2^n<\log_{10}(8\cdot 10^{k-1})$

$$\log_{10}7+\log_{10}10^{k-1}\leqq n\log_{10}2<\log_{10}8+\log_{10}10^{k-1}$$

$$0.8451+(k-1)\leqq 0.3010\,n<3\cdot(0.3010)+(k-1)$$

$$(k-1)+0.8451\leqq 0{,}3010\,n<(k-1)+0.9030 \quad\cdots(*)$$

n は 100 より小さい自然数より，

$$n=10a+b \quad (a,\ b \text{ は } 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9 \text{ だが，同時に } 0 \text{ とはならない})$$

と表せる。

$$\begin{aligned}0.3010\,n&=\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{1000}\right)(10a+b)\\&=3a+\frac{3}{10}b+\frac{1}{100}a+\frac{1}{1000}b\end{aligned}$$

$3a \longrightarrow 0.3010n$ の整数部分に影響する

$\frac{3}{10}b \longrightarrow 0.3010n$ の整数部分，及び小数第 1 位の値に影響する $\cdots$(☆)

$\frac{1}{100}a \longrightarrow 0.3010n$ の小数第 2 位の値に影響する

$\frac{1}{1000}b \longrightarrow 0.3010n$ の小数第 3 位の値に影響する

$(*)$ より，$0.3010n$ の小数第 1 位の値が 8 または 9 であることに注目し，(☆) に気を付けながら，

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3b$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$\frac{3}{10}b$	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7

という表を作る。

今，$0.3010n$ の小数第 1 位の値が 8 または 9 となるには $b=3,\ 6$ となる必要がある。

(i)　$b=3$ のとき

$(*)$ は，

$$(k-1)+0.8451\leqq 3a+0.9+\frac{1}{100}a+\frac{3}{1000}<(k-1)+0.9030$$

整数部分に注目すると，$3a=k-1$ であるため

$$0.8451\leqq 0.9+\frac{1}{100}a+\frac{3}{1000}<0.903$$

$a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$ でこれを満たすものは存在しない。

(ii)　$b=6$ のとき

$(*)$ は，

$$(k-1)+0.8451 \leqq 3a+1+0.8+\frac{1}{100}a+\frac{6}{1000}<(k-1)+0.9030$$

整数部分に注目すると，$3a+1=k-1$ であるため

$$0.8451 \leqq 0.8+\frac{1}{100}a+\frac{6}{1000}<0.903$$

0.846，0.856，0.866，…，0.896

これを満たす 1 桁の非負整数 a は

$$a=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

以上から，求める n は

$$n=46,\ 56,\ 66,\ 76,\ 86,\ 96 \cdots \text{答}$$

【総括】

例えば，2^{50} について

$\log_{10}2^{50}=50\log_{10}2=15.05$ であり，

$$2^{50}=10^{15.05}$$

です。

$$2^{50}=10^{0.05}\times 10^{15}$$

というように　$10^{(\text{整数部分})}\times 10^{(\text{小数部分})}$ と分けて考えます。

$10^{(\text{整数部分})}$ は「桁数」に影響します。(この場合 16 桁だと分かります。)

$10^{(\text{小数部分})}$ は「最高位の数字」に影響します

$$10^{0.05}\times 10^{15}=(m\ .***\cdots)\times 10^{15}$$

コイツは小数点を右に動かすだけで最高位の数字に影響しません

最高位の数について扱う本問の【戦略】を支えるのは

$2^{\bigcirc}$ を $10^{\square}$ に直したとき，□ の小数部分に注目するという基本です。