

2の累乗の最高位の数

次の問に答えよ。ただし、 $\log_{10}2=0.3010$ とする。

- (1) 次の式をみたす整数 k の値を求めよ。

$$10^4 < 2^k < 2 \cdot 10^4$$

- (2) 2004 個の 2 の累乗、 $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2004}$ のうち、10 進法で表したとき、その最高位の数字が 1 であるものの個数を求めよ。

< '04 早稲田大 >

【戦略】

- (1) 5 桁の 2 の累乗数の中で最高位が 1 のものが訊かれています。

これについては、辺々常用対数 (底が 10 の対数) をとって処理するだけです。

- (2) $2^m = 1 \overset{k \text{ 桁}}{*** \dots *}$ となるような k, m を探っていきます。

今回 2^{2004} までの数を考えるので、 k が Max どこまでとれるかを最初に調べます。

$$\log_{10} 2^{2004} = 2004 \cdot \log_{10} 2 = 2004 \cdot 0.3010 = 603.204$$

ということで、 $2^{2004} = 10^{603.204}$ となりますから、 2^{2004} は 604 桁です。

$2^m = 1 \overset{k \text{ 桁}}{*** \dots *}$ という状況は式的には $10^{k-1} \leq 2^m < 2 \cdot 10^{k-1}$ ということです。

辺々常用対数をとって整理すると

$$\frac{k-1}{\log_{10} 2} \leq m < 1 + \frac{k-1}{\log_{10} 2} \dots (*)$$

を得ます。

この不等式の幅は 1 なので、(*) を満たす整数 m は各々の k の値に対して 1 つ対応します。

つまり

$$2^m = 1 * (2 \text{ 桁}) \rightarrow m \text{ は } 1 \text{ 個 } (2^4 = 16)$$

$$2^m = 1 ** (3 \text{ 桁}) \rightarrow m \text{ は } 1 \text{ 個 } (2^7 = 128)$$

$$2^m = 1 *** (4 \text{ 桁}) \rightarrow m \text{ は } 1 \text{ 個 } (2^{10} = 1024)$$

のように、各桁に対して、最高位が 1 となる 2^m の m が 1 つ対応することになるわけです。

なので、 $2^1 \sim 2^{2004}$ のうち、最高位が 1 となるような 2^m は 603 個あることになります。

なお、 $k=1$ (1 桁) の中で最高位が 1 となるのは $2^0=1$ ですが、今回は考える対象から除外されています。

【解答】

- (1) $10^4 < 2^k < 2 \cdot 10^4$ の辺々常用対数をとると

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 2^k < \log_{10} 2 \cdot 10^4$$

$$\text{すなわち、} 4 < k \log_{10} 2 < \log_{10} 2 + 4$$

$$\text{これより、} \frac{4}{\log_{10} 2} < k < 1 + \frac{4}{\log_{10} 2}$$

$$\frac{4}{0.3010} < k < 1 + \frac{4}{0.3010} \text{ で、} 13.289 \dots < k < 14.289 \dots$$

したがって、これを満たす整数 k は $k=14 \dots$ ㊦

- (2) まずは 2^{2004} の桁数を求める。

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{2004} &= 2004 \log_{10} 2 \\ &= 2004 \cdot 0.3010 \\ &= 603.204 \end{aligned}$$

$$\text{より、} 2^{2004} = 10^{603.204} \text{ となり、} 10^{603} < 2^{2004} < 10^{604}$$

つまり、 2^{2004} は 604 桁である。

k 桁 ($k=2, 3, \dots, 604$) の 2 の累乗のうち、最高位が 1 のものは

$$10^{k-1} \leq 2^m < 2 \cdot 10^{k-1}$$

辺々常用対数をとると $k-1 \leq m \log_{10} 2 < \log_{10} 2 + (k-1)$

$$\text{ゆえに、} \frac{k-1}{\log_{10} 2} \leq m < 1 + \frac{k-1}{\log_{10} 2} \dots (*)$$

m についての数直線考えた際、この範囲の幅は 1 であるため、(*) を満たす整数 m は、各々の k の値 1 つにつき 1 つずつ存在する。

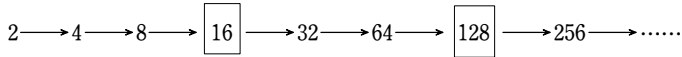
つまり、

$$2^m = 1 \overset{k \text{ 桁}}{*** \dots *}$$

となる m は、各 k ($=2, 3, \dots, 604$) に対して 1 つ存在する。

以上から、603 個 … ㊦

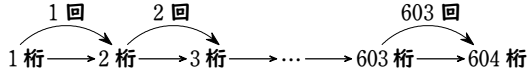
【戦略2】繰上りに注目する



このように、最高位の数字が1となるときは

桁数が繰り上がって増えるタイミングに限ります。

そう考えると



という603回「桁の繰上り」を起こしていますから、最高位の数が1となる現象も603回起こるわけです。

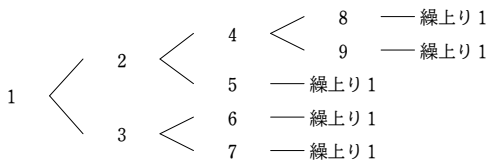
【解2】(2)について

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{2004} &= 2004 \log_{10} 2 \\ &= 2004 \cdot 0.3010 \\ &= 603.204 \end{aligned}$$

より、 $2^{2004} = 10^{603.204}$ となり、 $10^{603} < 2^{2004} < 10^{604}$

つまり、 2^{2004} は604桁である。

2の累乗の最高位の数の移り変わりは



このように移り変わり、桁数が繰り上がるまで最高位の数字1は現れず、同じ桁数の中では最高位の数字が1となるものは1つしか存在しない。

604桁の 2^{2004} までの範囲では、桁数の繰上りは603回起こっており、求める最高位の数字が1となるものも603個… 罫

【総括】

【戦略2】の直感的な部分を、数式でしっかり保証しているのが【解1】の路線です。

なので、本質的にやってることは大きくは変わらないと思います。

ただ、【解2】ぐらいの記述でも試験場では十分でしょう。