次の問に答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1)　次の式をみたす整数 k の値を求めよ。

$$10^4<2^k<2\cdot 10^4$$

(2)　2004 個の 2 の累乗，2^1，2^2，2^3，…，2^{2004} のうち，10 進法で表したとき，その最高位の数字が 1 であるものの個数を求めよ。

＜ '04 早稲田大 ＞

【戦略】

(1)　**5 桁の 2 の累乗数の中で最高位が 1 のものが訊かれています。**

これについては，辺々常用対数 (底が 10 の対数) をとって処理するだけです。

(2)　$2^m=\overbrace{1***\cdots*}^{k\text{桁}}$ **となるような k，m を探っていきます。**

今回 2^{2004} までの数を考えるので，k が Max どこまでとれるかを最初に調べます。

$$\log_{10}2^{2004}=2004\cdot\log_{10}2=2004\cdot 0.3010=603.204$$

ということで，$2^{2004}=10^{603.204}$ となりますから，2^{2004} は 604 桁です。

$2^m=\overbrace{1***\cdots*}^{k\text{桁}}$ **という状況は式的には** $10^{k-1}\leqq 2^m<2\cdot 10^{k-1}$ **ということです。**

辺々常用対数をとって整理すると

$$\frac{k-1}{\log_{10}2}\leqq m<1+\frac{k-1}{\log_{10}2}\quad\cdots(*)$$

を得ます。

この不等式の幅は 1 なので，$(*)$ を満たす整数 m は各々の k の値に対して 1 つ対応します。

つまり

$2^m=1*$ (**2 桁**)　→ m **は 1 個**　$(2^4=16)$
$2^m=1**$ (**3 桁**)　→ m **は 1 個**　$(2^7=128)$
$2^m=1***$ (**4 桁**) → m **は 1 個**　$(2^{10}=1024)$

のように，各桁に対して，最高位が 1 となる 2^m の m が 1 つ対応するということになるわけです。

なので，2^1 ～ 2^{2004} のうち，最高位が 1 となるような 2^m は 603 個あることになります。

なお，$k=1$ (1 桁) の中で最高位が 1 となるのは $2^0=1$ ですが，今回は考える対象から除外されています。

【解答】

(1)　$10^4<2^k<2\cdot 10^4$ の辺々常用対数をとると

$$\log_{10}10^4<\log_{10}2^k<\log_{10}2\cdot 10^4$$

すなわち，$4<k\log_{10}2<\log_{10}2+4$

これより，$\dfrac{4}{\log_{10}2}<k<1+\dfrac{4}{\log_{10}2}$

$\dfrac{4}{0.3010}<k<1+\dfrac{4}{0.3010}$ で，$13.289\cdots<k<14.289\cdots$

したがって，これを満たす整数 k は $k=14$ … 答

(2)　まずは 2^{2004} の桁数を求める。

$$\begin{aligned}\log_{10}2^{2004}&=2004\log_{10}2\\&=2004\cdot 0.3010\\&=603.204\end{aligned}$$

より，$2^{2004}=10^{603.204}$ となり，$10^{603}<2^{2004}<10^{604}$

つまり，2^{2004} は 604 桁である。

k 桁 ($k=2$，3，…，604) の 2 の累乗のうち，最高位が 1 のものは

$$10^{k-1}\leqq 2^m<2\cdot 10^{k-1}$$

辺々常用対数をとると $k-1\leqq m\log_{10}2<\log_{10}2+(k-1)$

ゆえに，$\dfrac{k-1}{\log_{10}2}\leqq m<1+\dfrac{k-1}{\log_{10}2}$　$\cdots(*)$

m についての数直線を考えた際，この範囲の幅は 1 であるため，$(*)$ を満たす整数 m は，各々の k の値 1 つにつき 1 つずつ存在する。

つまり，

$$2^m=\overbrace{1***\cdots*}^{k\text{桁}}$$

となる m は，各 k ($=2$，3，…，604) に対して 1 つ存在する。

以上から，603 個 … 答

【戦略 2】繰上りに注目する

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow \boxed{16} \longrightarrow 32 \longrightarrow 64 \longrightarrow \boxed{128} \longrightarrow 256 \longrightarrow \cdots\cdots$$

というように，最高位の数字が 1 となるときは

桁数が繰り上がって増えるタイミングに限ります。

そう考えると

$$1\,\text{桁} \xrightarrow{1\,\text{回}} 2\,\text{桁} \xrightarrow{2\,\text{回}} 3\,\text{桁} \longrightarrow \cdots \longrightarrow 603\,\text{桁} \xrightarrow{603\,\text{回}} 604\,\text{桁}$$

という 603 回「桁の繰上り」を起こしていますから，最高位の数が 1 となる現象も 603 回起こるわけです。

【解 2】⑵ について

$$\begin{aligned}\log_{10}2^{2004} &= 2004\log_{10}2\\ &= 2004\cdot 0.3010\\ &= 603.204\end{aligned}$$

より，$2^{2004}=10^{603.204}$ となり，$10^{603}<2^{2004}<10^{604}$

つまり，2^{2004} は 604 桁である。

2 の累乗の最高位の数の移り変わりは

- 1
  - 2
    - 4
      - 8 ── 繰上り 1
      - 9 ── 繰上り 1
    - 5 ── 繰上り 1
  - 3
    - 6 ── 繰上り 1
    - 7 ── 繰上り 1

というように移り変わり，桁数が繰り上がるまで最高位の数字 1 は現れず，同じ桁数の中では最高位の数字が 1 となるものは 1 つしか存在しない。

604 桁の 2^{2004} までの範囲では，桁数の繰上りは 603 回起こっており，求める最高位の数字が 1 となるものも 603 個 … 答

【総括】

【戦略 2】の直感的な部分を，数式でしっかり保証しているのが【解 1】の路線です。

なので，本質的にやってることは大きくは変わらないと思います。

ただ，【解 2】ぐらいの記述でも試験場では十分でしょう。