　a を実数とし，点 $(1,1)$ を通る直線 h と直線 $g : y=ax+1$ とが交点 A で垂直に交わるとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　交点 A の座標を求めよ。

(2)　a が実数全体を動くとき，交点 A の軌跡を求めよ。

＜ '97 岐阜大 ＞

【戦略 1】

(1)　**直線 h は g に対して垂直で $(1,1)$ を通るということなので，場合分けこそ必要ですが立式できます。**

立式さえできれば，連立方程式を解いて交点の座標を求めるだけです。

(2)　**交点の座標を (X, Y) としたとき，(1) の結果から** $\begin{cases} X=\dfrac{1}{a^2+1} \\ Y=\dfrac{a^2+a+1}{a^2+1} \end{cases}$

となります。

ここから a を消去して X, Y の関係式を求めに行くわけです。

例題で学習したように，(X, Y) が直線 $g : y=ax+1$ 上であることを利用して

$Y=aX+1$ **という関係式から a を消去します。**

【解 1】

(1)　h は g と直交し，$(1,1)$ を通るので

$$h : \begin{cases} y=-\dfrac{1}{a}(x-1)+1 & (a \neq 0 \text{ のとき}) \\ x=1 & (a=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(i)　$a \neq 0$ のとき $y=-\dfrac{1}{a}(x-1)+1$，$y=ax+1$ を連立して解くと

$$(x, y)=\left(\frac{1}{a^2+1}, \frac{a^2+a+1}{a^2+1}\right)$$

よって，交点 A の座標は $\left(\dfrac{1}{a^2+1}, \dfrac{a^2+a+1}{a^2+1}\right) \cdots (*)$

(ii)　$a=0$ のとき $h : x=1$，$g : y=1$ であり，h，g の交点 A の座標は $(1,1)$

$(*)$ で $a=0$ とすると，この結果と一致するため，$(*)$ は $a=0$ のときも正しい結果を与える。

以上 (i)，(ii) から，求める直線 g，h の交点 A の座標は

$$\left(\frac{1}{a^2+1}, \frac{a^2+a+1}{a^2+1}\right) \cdots \text{答}$$

(2)　A(X, Y) とすると，$\begin{cases} X=\dfrac{1}{a^2+1} & \cdots ① \\ Y=\dfrac{a^2+a+1}{a^2+1} & \cdots ② \end{cases}$

① より，$X>0 \cdots ③$

また，(X, Y) は $y=ax+1$ 上の点より，$Y=aX+1$

③ より，$a=\dfrac{Y-1}{X}$ であり，これを ① に代入すると

$$X=\frac{1}{\left(\dfrac{Y-1}{X}\right)^2+1}$$

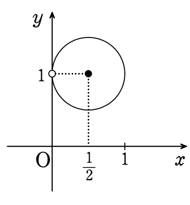
$$=\frac{X^2}{X^2+(Y-1)^2}$$

③ より，$1=\dfrac{X}{X^2+(Y-1)^2}$ で，これを整理すると，

$\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+(Y-1)^2=\dfrac{1}{4}$ を得る。

③ も考えると，求める軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$ のうち，$(0,1)$ を除く部分 $\cdots$ 答



【戦略 2】(2) について

(1) の誘導があったため，交点から導出しましたが，例題の【総括】で述べたように，交点を求めるのはむしろミスリードです。

交点に触れない「逆像法」で考えてみます。

【解 2】(2) について

求める軌跡を C として，(X, Y) が C 上にあるときの X, Y が満たすべき条件を考える。

(i)　$a \fallingdotseq 0$ のとき，この X, Y は $\begin{cases} Y=-\dfrac{1}{a}(X-1)+1 & \cdots ① \\ Y=aX+1 & \cdots ② \end{cases}$ をともに満たす。

$X=0$ とすると，② より，$Y=1$ であり，① に代入すれば

$1=-\dfrac{1}{a}(0-1)+1$，すなわち $\dfrac{1}{a}=0$ となり，これを満たす実数 a は存在しない。

ゆえに，$X \fallingdotseq 0$ であり，このとき ② より $a=\dfrac{Y-1}{X}$

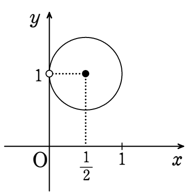
① に代入すれば，$Y=\dfrac{X}{1-Y}(X-1)+1$

これを整理すると，$\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+(Y-1)^2=\dfrac{1}{4}$

(ii)　$a=0$ のとき
$h : x=1$，$g : y=1$ であり，2 直線 h, g の交点 A の座標は $(1, 1)$

以上 (i), (ii) より，求める 2 直線 g, h の交点 A の軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$ のうち，$(0, 1)$ を除く部分 … 答



【戦略 3】(2) について

a の値に関わらず，h は $(1, 1)$ を通り，g は $(0, 1)$ を通ります。

加えて，h, g は直交性を保ちながら動くとなると，

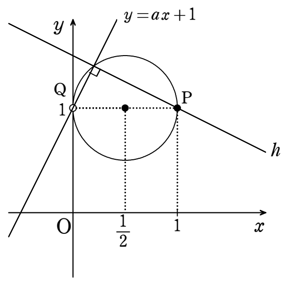
直径を見込む円周角の定理から，求める交点の軌跡が円であることが分かります。

【解 3】(2) について

P$(1, 1)$, Q$(0, 1)$ とする。

a の値に関わらず $\begin{cases} h & \text{は P を必ず通る} \\ g & \text{は Q を必ず通る} \end{cases}$

また，h, g は互いに直交しながら動くため，求める g, h の交点 A は線分 PQ を直径にもつ円上にある。



直線 g には傾きが存在するため，h の傾きは 0 にならず，$(1, 1)$ を通る直線 h が $(0, 1)$ を通ることはなく，A$(0, 1)$ にはなり得ない。

以上から，求める 2 直線 g, h の交点 A の軌跡は

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$ のうち，$(0, 1)$ を除く部分 … 答

【総括】

例題で学んでことに加え，幾何的な別解を追加しました。

やはり，幾何は見たまんまですから早いです。

しかし，いつもいつも幾何的に進めれる保証はありませんから，詳しくは式に教えてもらうという態度で導出する力が大切です。