2つの直線

$\ell:(k+1)x+(1-k)y+k-1=0$ ，$m:kx+y+1=0$

がある。k がすべての実数値をとるとき，ℓ と m の交点の軌跡を求めよ。

＜ '06 島根大 ＞

【戦略 1】

求める軌跡を C として，逆像法の態度で

(X, Y) が C 上にあるとしたらどんな (X, Y) でなきゃいけないのか

と考えます。（理由は【総括】で）

例えば，$(1, 3)$ は C の上にくることができるか？と考えると

$$\begin{cases}(k+1)+3(1-k)+k-1=0\\ k+3+1=0\end{cases}$$

をともに満たす k が存在するかどうかが問題です。

この場合 $k=3$ かつ $k=-4$ ということになり，これら2式を同時に満たす k は存在しないため，$(1, 3)$ は C には含まれないことが分かります。

このような「しらみつぶしの考え方」(逆像法) で処理していきます。

【解 1】

求める軌跡を C として，(X, Y) が C 上にあるための条件を考える。

$$\begin{cases}(k+1)X+(1-k)Y+k-1=0 \cdots ①\\ kX+Y+1=0 \cdots ②\end{cases}$$

を満たす k が実数として存在すればよい。

(i) $X\neq 0$ のとき　② より $k=\dfrac{-Y-1}{X}$

① に代入し，$\left(\dfrac{-Y-1}{X}+1\right)X+\left(1+\dfrac{Y+1}{X}\right)Y-\dfrac{Y+1}{X}-1=0$

整理すると，$X^2+Y^2-2X-1=0$

すなわち $(X-1)^2+Y^2=2$

(ii) $X=0$ のとき　② より $Y=-1$

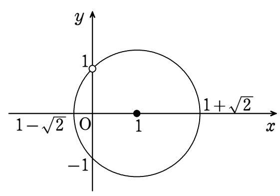
このとき，① を満たす k として $k=1$ という実数が存在する。

※ $(1-k)\cdot(-1)+k-1=0$

つまり，$(0, -1)$ は交点としてあり得る。

以上 (i)，(ii) から求める交点の軌跡 C は

円 $(x-1)^2+y^2=2$ のうち，$(0, 1)$ を除く部分 … 答



【戦略 2】

交点の軌跡を求めるために，交点を導出しようと考える人も多いでしょう。
（むしろそちらの方が多数派だと思います。）

その方針で考えてみます。

少し計算は大変になりますが，ℓ，m を連立して解くと

$$(x,\ y)=\left(\frac{-2k+2}{k^2+1},\ \frac{k^2-2k-1}{k^2+1}\right)$$

ですから，交点の座標は $\left(\dfrac{-2k+2}{k^2+1},\ \dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1}\right)$ **です。**

交点を $(X,\ Y)$ とおいたとき， $\begin{cases} X=\dfrac{-2k+2}{k^2+1} \\ Y=\dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1} \end{cases}$ **というパラメータ表示されます。**

「X，Y の関係式を求める」のが目的ですから，ここから k を消去したいわけです。

しかし，見ての通り，k を消去するのは困難です。

ここから打破しようと思うと，$(X,\ Y)$ が元々直線 $kx+y+1=0$ 上にあることを看破し，

$$kX+Y+1=0$$

を満たしていることを利用します。

これなら，k を消去することが容易でしょう。

【解 2】

ℓ，m の式を連立して解くと $(x,\ y)=\left(\dfrac{-2k+2}{k^2+1},\ \dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1}\right)$

よって，ℓ，m の交点の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{cases} X=\dfrac{-2k+2}{k^2+1} \ \cdots ① \\ Y=\dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1} \cdots ② \end{cases}$$

となる。

この $(X,\ Y)$ は直線 $m : kx+y+1=0$ 上の点であるため

$$kX+Y+1=0 \ \cdots (☆)$$

を満たす。

(i)　$X\fallingdotseq 0$ のとき (☆) より，$k=\dfrac{-Y-1}{X}$

① に代入し，$X=\dfrac{-2\left(\dfrac{-Y-1}{X}\right)+2}{\left(\dfrac{-Y-1}{X}\right)^2+1}$

$$=\frac{2X(Y+1)+2X^2}{X^2+(Y+1)^2}$$

$X\fallingdotseq 0$ より　$1=\dfrac{2(Y+1)+2X}{X^2+(Y+1)^2}$

$X^2+(Y+1)^2=2(Y+1)+2X$ で，これを整理すると

$$(X-1)^2+Y^2=2 \ \cdots (*)$$

(ii)　$X=0$ のとき (☆) より，$Y=-1$

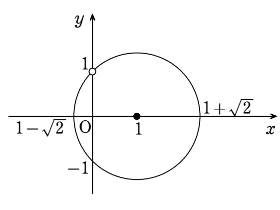
①，② より $\begin{cases} \dfrac{-2k+2}{k^2+1}=0 \\ \dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1}=-1 \end{cases}$ で，これらをともに満たす

実数 k は $k=1$

よって，$k=1$ のときの ℓ，m の交点が $(0,\ -1)$

以上 (i)，(ii) から求める交点の軌跡は

円 $(x-1)^2+y^2=2$ のうち，$(0,\ 1)$ を除く部分 … 答



【総括】

思いつきやすい路線は実際に交点 (X, Y) を計算して

$$\begin{cases} X=\dfrac{-2k+2}{k^2+1} \cdots ① \\ Y=\dfrac{k^2-2k-1}{k^2+1} \cdots ② \end{cases}$$

を導出し，X, Y の関係式を求めに行く【解 2】の路線でしょう。

しかし，(X, Y) が $m: kx+y+1=0$ 上の点であることを利用し，$kX+Y+1=0$ であることを看破することは中々難しかったかもしれません。(有名テーマなので経験済みという人も多いとは思いますが。)

もし，これを見抜けなかった場合は

② を $Y=\dfrac{(k^2+1)-2k-2}{k^2+1}=1+\dfrac{-2k+2-4}{k^2+1}=1+X-\dfrac{4}{k^2+1}$

と，仮分数を帯分数に直し，$\dfrac{1}{k^2+1}=\dfrac{1}{4}(X-Y+1)$ を得ます。

これを ① に代入すると，

$$\begin{aligned} X&=-2(k-1)\cdot\frac{1}{4}(X-Y+1) \\ &=\frac{1}{2}(1-k)(X-Y+1) \end{aligned}$$

で，整理すると，$(k+1)X+(1-k)Y+k-1=0$ を得ます。

これは，(X, Y) が直線 ℓ 上であることを利用した関係式となり，ここから k を消去することが考えられます。

本問の困難を生み出した原因は

Ⅰ：『交点を求める』→ X, Y を k で表す

Ⅱ：『軌跡を求める』→ k を消去して X, Y の関係式を求める

と，目的が真逆である部分にあります。

そう考えると，最終的な目標『軌跡を求める』という目標Ⅱを達成するにあたって，真逆の行為であるⅠを行うのは，ある意味無駄です。

このような理由から，交点に触れない【解 1】の逆像法の路線が合理的です。