xyz 空間において，x 軸，y 軸，z 軸をそれぞれ中心軸とする半径 1 の直円柱 A，B，C がある 。

(1) A，Bの共通部分の体積を求めよ。

(2) A，B，C の共通部分の体積を求めよ。

<有名問題>

【戦略】

円柱と円柱の交差する部分の体積を考える有名問題です。

見づらい立体を「不等式で表す」ことにより，

式に断面などを教えてもらう

という態度で考えることができます。
（もちろんそのためには「不等式で表された立体の体積」というトピックスに習熟している必要があります。）

(1) **A，B の共通部分は** $\begin{cases} y^2+z^2 \leqq 1 \\ z^2+x^2 \leqq 1 \end{cases}$ （x **軸に突き刺さっている円柱**）（y **軸に突き刺さっている円柱**）
という連立不等式で表現できます。

ここからは「不等式で表された立体の体積」のトピックスにおける基本であり，登場回数の多い文字である z **に注目し** $z=k$ **と切ります。**

(2) (1) **で考えた立体を 3 本目の円柱でくり抜く感じでしょうか。**

ともかく，題意の立体は $\begin{cases} y^2+z^2 \leqq 1^2 \\ x^2+z^2 \leqq 1^2 \\ x^2+y^2 \leqq 1^2 \end{cases}$ **という連立不等式で表現できます。**

対称性を考えれば $x=k$，$y=k$，$z=k$ **のどれで切っても変わりません。**

ここでは $z=k$ **で切ることにします。**

【解答】

(1) 求める立体は $\begin{cases} y^2+z^2 \leqq 1 \\ z^2+x^2 \leqq 1 \end{cases}$ を満たす 点 (x, y, z) の集合からなる。

この立体を $z=k$ で切ったときの切り口は

$\begin{cases} y^2+k^2 \leqq 1 \\ x^2+k^2 \leqq 1 \end{cases}$，すなわち $\begin{cases} y^2 \leqq 1-k^2 \\ x^2 \leqq 1-k^2 \end{cases}$ $\cdots$ ①

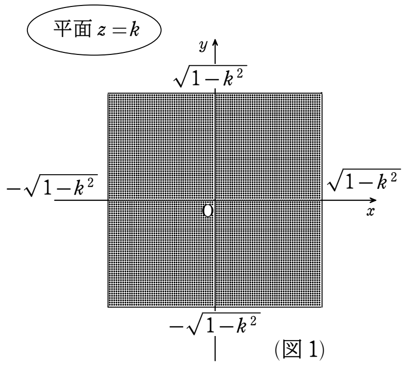
を満たす点 (x, y, k) の集合からなる。

ここで，$1-k^2<0$ ではそのような実数 x，y は存在しないから，

$$1-k^2 \geqq 0$$

すなわち，$-1 \leqq k \leqq 1$ のとき，切り口が存在する .

このとき ① $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -\sqrt{1-k^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-k^2} \\ -\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-k^2} \end{cases}$ で，これを満たす領域（$z=k$ で切った時の切り口）を図示すると (図 1) のようになる。



(図 1)

この切り口の面積を $S(k)$ とおくと

$$S(k)=\left(2\sqrt{1-k^2}\right)^2=4(1-k^2)$$

よって求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} S(k)\,dk \\ &= \int_{-1}^{1} 4(1-k^2)\,dk \\ &= 2\int_{0}^{1} 4(1-k^2)\,dk = 8\left[k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^1 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$ $\cdots$ 答

(2) 求める立体は $\begin{cases} y^2+z^2 \leqq 1^2 \\ x^2+z^2 \leqq 1^2 \\ x^2+y^2 \leqq 1^2 \end{cases}$ を満たす点 (x, y, z) の集合からなる。

この立体を $z=k$ で切ったときの切り口は

$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1^2 \\ x^2 \leqq 1-k^2 \\ y^2 \leqq 1-k^2 \end{cases}$ $\cdots$ ② を満たす点 (x, y, k) の集合からなる。

ここで，$1-k^2<0$ ではそのような実数 x，y は存在しないから，

$$1-k^2 \geqq 0$$

すなわち，$-1 \leqq k \leqq 1$ のとき，切り口が存在する。

このとき ② は $\begin{cases} z=k \quad (-1 \leqq k \leqq 1) \\ x^2+y^2 \leqq 1 \\ -\sqrt{1-k^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-k^2} \\ -\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-k^2} \end{cases}$ $\cdots$ ②′ であるから

平面 $z=k$ で切った切り口（②′ が表す領域）を図示する。

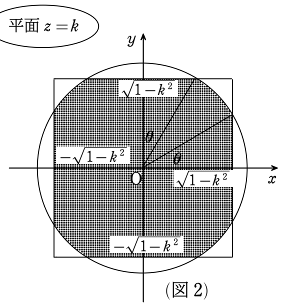
対称性から以後 $k \geqq 0$ で考えることにする。

（Ⅰ）$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sqrt{1-k^2}$，すなわち $0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

切り口の面積 S_1 は (図 2) のように θ を設定すると

$$S_1=\left\{\left(\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)\times 2+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}\times 4$$
$$=4\sin\theta\cos\theta+\pi-4\theta$$

（※ ここで $k=\sin\theta$ ）



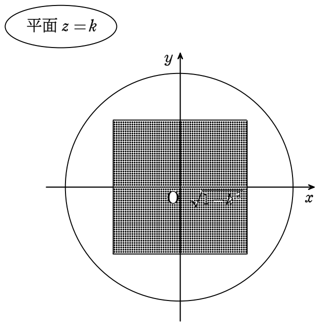
(図 2)

$$V_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S_1\,dk$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} S_1\frac{dk}{d\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos\theta\sin\theta+\pi-4\theta)\cos\theta\;d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(4\cos^2\theta\sin\theta+\pi\cos\theta-4\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\left[4\cdot\frac{(\cos\theta)^3}{3}+\pi\cdot\sin\theta-4(\theta\sin\theta+\cos\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=-\frac{7\sqrt{2}}{3}+\frac{16}{3}$$

（Ⅱ）$\sqrt{1-k^2} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq k \leqq 1$ のとき

切り口の面積 S_2 は

$$S_2=(2\sqrt{1-k^2})^2$$
$$=4(1-k^2)$$



$$V_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 S_2\,dk$$
$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 4(1-k^2)\,dk$$
$$=4\left[k-\frac{k^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

以上（Ⅰ），（Ⅱ）より求める体積 V は

$$V=2(V_1+V_2)$$
$$=2\left\{\left(-\frac{7\sqrt{2}}{3}+\frac{16}{3}\right)+\left(\frac{8}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$
$$=16-8\sqrt{2}\ \cdots 答$$

【総括】

不等式で表すことで機械的に処理できるトピックスに帰着させるわけです。

目を凝らしてもよく分からないから式に教えてもらおうという魂胆です。

なお，ガッチャンコしてから切ると訳わかりませんが，

「先に切ってからガッチャンコ」

すると，(1) の切り口が正方形であることは想像がつきます。