

累乗根の無理数性【類題】

次の問いに答えよ。

- (1) 1, 4, 9, 16 のように、自然数の2乗で表せる数を平方数という。
 n を平方数でない自然数とすると、 \sqrt{n} は無理数であることを示せ。
- (2) a, b を正の有理数、 n を自然数とすると、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ は無理数であることを示せ。

< '18 佐賀大 >

【戦略】

- (1) 題意の主張はあらためて証明しろと言われると案外汗をかく人も出てくるでしょう。

無理数(有理数でない数)という否定的なことを示すのですから背理法を手なりに選択したいところです。

\sqrt{n} が有理数だと仮定すると

$$\sqrt{n} = \frac{\ell}{k} \quad (k, \ell \text{ は互いに素な正の整数})$$

と表せます。

ここから、 $n = \frac{\ell^2}{k^2}$ とし、 $nk^2 = \ell^2$ とする人も多いかと思います。

実はこの路線は注意を孕んでいますので、その路線は【戦略2】で考えてみます。

ここでは、 $n = \frac{\ell^2}{k^2}$ から、分母を1乗分だけ払う $nk = \frac{\ell^2}{k}$ と見ます。

初見だとテクッているように思うかもしれませんが

(整数) = (分数) という形で見ると整数問題の典型的なモノの見方です。

- (2) これについても背理法です。

$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定すると、

$$a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な自然数})$$

と表せます。

両辺2乗すると、 $a^2n + 2ab\sqrt{n(n+1)} + b^2(n+1) = \frac{q^2}{p^2}$

を得ます。

この後どういう形で「矛盾」が起こるかという「オチ」をある程度見越しておく、

$$\sqrt{n(n+1)} = \frac{1}{2ab} \left\{ \frac{q^2}{p^2} - (a^2 + b^2)n - b^2 \right\}$$

と見なくなるでしょう。

右辺は有理数ですが、左辺が無理数となり、矛盾するというオチです。

左辺の無理数性については、 $n(n+1)$ は平方数でないことから(1)の結果を用いて示すことができるでしょう。

【解答】

- (1) n が平方数でないとき、 \sqrt{n} が有理数だと仮定する。このとき

$$\sqrt{n} = \frac{\ell}{k} \quad (k, \ell \text{ は互いに素な正の整数})$$

と表せる。

このとき、 $n = \frac{\ell^2}{k^2}$ であり、 $nk = \frac{\ell^2}{k}$ を得る。

左辺の nk は自然数なので、右辺の $\frac{\ell^2}{k}$ も自然数である。

k, ℓ は互いに素であるため、 k と ℓ^2 は共通素因数をもつことはなく、 $k=1$ となるしかない。

よって、 $n = \ell^2$ となり、 n が平方数でないことに矛盾する。

以上から、 n が平方数でないとき、 \sqrt{n} は無理数である。

- (2) $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$ が有理数であると仮定する。

このとき、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = \frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数) と表せる。

両辺2乗すると、 $a^2n + 2ab\sqrt{n(n+1)} + b^2(n+1) = \frac{q^2}{p^2}$

これより、 $\sqrt{n(n+1)} = \frac{1}{2ab} \left\{ \frac{q^2}{p^2} - (a^2 + b^2)n - b^2 \right\}$

a, b, n, p, q は有理数なので、右辺は有理数。

一方、 $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$ より、 $n(n+1)$ は連続平方数の間にあるため、平方数でないため、(1)より $\sqrt{n(n+1)}$ は無理数となり、矛盾する。

以上より、題意は示された。

【戦略2】(1)について

\sqrt{n} が有理数だと仮定し、 $\sqrt{n} = \frac{l}{k}$ (k, l は互いに素な正の整数) と表したあと、 $n = \frac{l^2}{k^2}$ とし、 $nk^2 = l^2$ とする人も多いかと思います。

ここから、 l は n の倍数とするのは誤りです。

例えば、 $n = 576 (= 2^6 \cdot 3^2)$ のとき、 $576k^2 = l^2$ ですが

l は 576 の倍数ではありません。

l が 24 の倍数であれば、 l^2 が 576 の倍数となってくれるからです。

つまり、2乗というのが厄介です。

ただ、上の反例を出すために見た部分がヒントになるでしょう。

そう、576 を素因数分解したときの素因数の個数です。

この困難を回避するために、「素因数の個数」に注目してみます。

【解2】(1)について

n が平方数でないとき、 \sqrt{n} が有理数だと仮定する。このとき

$$\sqrt{n} = \frac{l}{k} \quad (k, l \text{ は互いに素な正の整数})$$

と表せる。

このとき、 $n = \frac{l^2}{k^2}$ であり、 $nk^2 = l^2$

n が平方数 $\Leftrightarrow n=1$ または「 n を素因数分解したとき各素因数は偶数乗」

条件より、 $n=1$ ではない。

$nk^2 = l^2$ の左辺である nk^2 を素因数分解したときを考える。

n は平方数でないため、 nk^2 を素因数分解したときに奇数乗の素因数が存在する。

一方、 l^2 を素因数分解したときには偶数乗の素因数しかなく矛盾する。

【総括】

なめてかかると意外と足をすくわれるかもしれません。

恐らく、 $\sqrt{n} = \frac{l}{k}$ (k, l は互いに素な正の整数) と仮定した後、 $nk^2 = l^2$

として、この後鉛筆を噛み始めた人も多いでしょう。

$$l^2 \text{ が } n \text{ の倍数} \Rightarrow l \text{ が } n \text{ の倍数}$$

ということが一般的に言えないため困ってしまうというわけです。

【戦略2】で述べたような反例を考えてみるとダメな理由が分かりますが、ダメな理由と同時に打開のための目の付け所も分かります。

ダメな理由を探すということは「患部にメスを入れる」ことですから、自然と問題の急所に首を突っ込むことになるわけで、そこから打開策が見出せることも多々あることは糧にしてください。