　n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

　命題 p ：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

　命題 q ：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

＜ '07 京都大 ＞

【戦略】

＜命題 p について＞

$\sqrt{n}$ が有理数 $\Longrightarrow$ その有理数は整数，すなわち

$$\sqrt{n} \text{ が有理数} \Longrightarrow n \text{ は平方数} \cdots (☆)$$

ということを自明のものとして使ってよいなら，

$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の中身である n，$n+1$ がともに平方数となることがあるかどうかという問題になります。

そう考えると，連続 2 整数である平方数は 0，1 しかあり得ません。

$n \geqq 1$ ですからそれは無理な相談ということで，命題 p は正しくないことになります。

ここでは，(☆) も証明しつつ解答をまとめていきます。

＜命題 q について＞

直感的には有理数になることはなさそうです。

そこで，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=u$ (u ：正の有理数) となるようなものを探しに行きます。

見つかれば命題 q は正しくないということが言えますし，もし見つからず矛盾でも起きようものなら命題 q が正しいという証明になります。

【解答】

$\sqrt{n}$ が有理数ならば，n は平方数 $\cdots$ (☆) であることを示す。

(☆) の対偶である

　　n が平方数でないならば，$\sqrt{n}$ は無理数 $\cdots$ (★)

を示せばよい。

n が平方数でないとき，$\sqrt{n}$ が有理数だと仮定する。

$$\sqrt{n}=\frac{\ell}{k} \quad (k, \ell \text{ は互いに素な正の整数})$$

と表せる。

このとき，$n=\dfrac{\ell^2}{k^2}$ であり，$nk=\dfrac{\ell^2}{k}$ を得る。

左辺の nk は自然数なので，右辺の $\dfrac{\ell^2}{k}$ も自然数である。

k，ℓ は互いに素であるため，k と ℓ^2 は共通素因数をもつことはなく $k=1$ となるしかない。

よって，$n=\ell^2$ となり，n が平方数でないことに矛盾する。

ゆえに (★) が示され，その対偶である (☆) も示された。

＜命題 p について＞

$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ がともに有理数であると仮定する。

すると，(☆) より，

$$\begin{cases} n=N^2 \\ n+1=M^2 \end{cases} \quad (N, M \text{ は } N<M \text{ なる自然数})$$

と表せる。

このとき，$M^2-N^2=1$，すなわち $(M+N)(M-N)=1$

$M+N>M-N>0$ なので，$\begin{cases} M+N=1 \\ M-N=1 \end{cases}$ となるしかなく，

$M=1$，$N=0$ を得ることになり，$n=0$ となり $n \geqq 1$ に反する。

このオチは【戦略】で想定していたとおりです。

以上より，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ がともに有理数であることはない。

命題 p は正しくない $\cdots$ 答

＜命題 q について＞

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=u\ (u：正の有理数)\ \cdots ①$$

を満たす u が存在したと仮定する。

このとき，$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=u$ なので，$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\dfrac{1}{u}$ $\cdots ②$

ここが人によってはアクロバティックに見えるかもしれません。

①，② から，$\begin{cases}\sqrt{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u+\dfrac{1}{u}\right)\\ \sqrt{n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u}-u\right)\end{cases}$

これより，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n}$ がともに有理数となるが，命題 p が正しいことになってしまい矛盾する。

したがって，すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数ということが言える。

命題 q は正しい。… 答

【戦略 2】命題 q について

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=u$ $(u：正の有理数)$ と仮定したとき

【解 1】のように $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=u$ と見れなかった場合の路線を考えてみます。

ここでは命題 p を意識して

$$\sqrt{n+1}=\sqrt{n}+u\ \cdots(*)$$

と見ます。

両辺 2 乗すると $n+1=n+2u\sqrt{n}+u^2$ から $\sqrt{n}=\dfrac{1-u^2}{2u}$ を得ることになります。

このことから $\sqrt{n}$ は有理数となるわけです。

命題 p が正しくないという結果は，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ は同時に有理数とならないということを意味しますから $\sqrt{n}$ が有理数なのであれば，$\sqrt{n+1}$ は無理数ということになります。

これは $(*)$ において左辺が無理数，右辺が有理数ということになり，矛盾します。

【解 2】命題 q について

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=u$ $(u：正の有理数)$ を満たす u が存在したと仮定する。

このとき，

$$\sqrt{n+1}=\sqrt{n}+u\ \cdots(*)$$

であり，両辺 2 乗すると

$n+1=n+2u\sqrt{n}+u^2$ であり，$\sqrt{n}=\dfrac{1-u^2}{2u}$ を得る。

これより，$\sqrt{n}$ は有理数となる。

命題 p が正しくないという結果は，

$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ が同時に有理数とならない

ということを意味する。

よって，$\sqrt{n+1}$ は無理数となる。

$(*)$ の左辺は無理数，右辺は有理数となり矛盾する。

ゆえに，すべての n に対して $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数となることはない。

したがって，命題 q は正しい。… 答

【総括】

基本的に疑ってかかることになるでしょう。

証明問題であれば結論が見える分，心理的に楽になるかもしれませんが，本問のように真偽判定まで含めて判断するとなると，判断ミス一つで証明もできず，反例も出せずという結果になってしまいます。