△ABCは鋭角三角形とする。このとき，各面すべてが △ABCと合同な四面体が存在することを示せ。

＜ ’99 京都大 ＞

【戦略】

存在証明です。

「等面四面体は直方体から切り出せる」ということから，

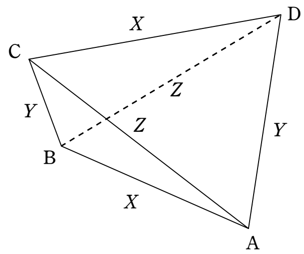
鋭角三角形をうまく x 軸，y 軸，z 軸に乗せることができる

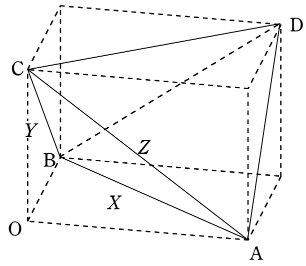
ということを示せばよいことになります。

【解答】

この鋭角三角形の 3 辺の長さを X, Y, Z とする。

等面四面体は直方体から切り出せる。





上の図において，O を原点として
A$(a, 0, 0)$, B$(0, b, 0)$, C$(0, 0, c)$ （$a>0$, $b>0$, $c>0$）とする。

すると，上の図において $\begin{cases} a^2+b^2=X^2 & \cdots ① \\ b^2+c^2=Y^2 & \cdots ② \\ c^2+a^2=Z^2 & \cdots ③ \end{cases}$

これを満たす正の実数 a, b, c が存在することを示せばよい。

①+②+③ より，$2(a^2+b^2+c^2)=X^2+Y^2+Z^2$，すなわち

$$a^2+b^2+c^2=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} \cdots ④$$

①，④ より $X^2+c^2=\dfrac{X^2+Y^2+Z^2}{2}$ だから，$c^2=\dfrac{Y^2+Z^2-X^2}{2}$

②，④ より $Y^2+a^2=\dfrac{X^2+Y^2+Z^2}{2}$ だから，$a^2=\dfrac{Z^2+X^2-Y^2}{2}$

③，④ より $Z^2+b^2=\dfrac{X^2+Y^2+Z^2}{2}$ だから，$b^2=\dfrac{X^2+Y^2-Z^2}{2}$

鋭角三角形の辺の長さ X, Y, Z について $\begin{cases} X^2+Y^2>Z^2 \\ Y^2+Z^2>X^2 \\ Z^2+X^2>Y^2 \end{cases}$

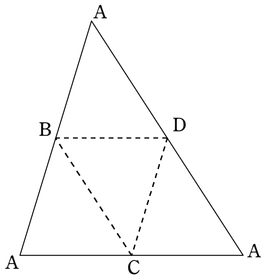
なので，

$$a=\sqrt{\frac{Z^2+X^2-Y^2}{2}},\ b=\sqrt{\frac{X^2+Y^2-Z^2}{2}},\ c=\sqrt{\frac{Y^2+Z^2-X^2}{2}}$$

と正の実数 a, b, c が存在し，X, Y, Z を 3 辺の長さにもつ鋭角三角形に対して，この鋭角三角形を埋め込む直方体が存在し，その直方体からこの鋭角三角形を各面にもつような等面四面体が切り出せるので，題意は示された。

【総括】

私が受験生のとき，この問題を解いたときの話です。



という展開図を描いて，「えっ絶対存在するじゃん」と思った経験があります。

そして，

「鋭角三角形って条件いる？」

と思いました。

ここから先はご自身で

「牛乳パック」と「ハサミ」

で切り開いて実感してください。

この時代にアナログな方法かもしれませんが，一番納得がいきます。