

等面四面体

四面体 ABCD は4つの面のどれも3辺の長さが7, 8, 9の三角形である。この四面体 ABCD の体積を求めよ。

< '14 早稲田大 >

【戦略】

四面体の4つの面が全て合同であるとき、その四面体を「等面四面体」と言います。

等面四面体の扱いについては知らなければほぼ絶望的です。

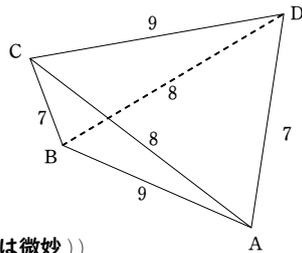
まともなぶつかりと、

3辺の長さが7, 8, 9の
三角形の面積を出す

(余弦定理 → sin に直す

→ 面積を出す という面倒な手順)

(もしくはヘロンの公式(使っていいかは微妙))



Cから底面に下ろした垂線の足をHとして $|\overrightarrow{CH}|$ を求める。

(すこぶる面倒)

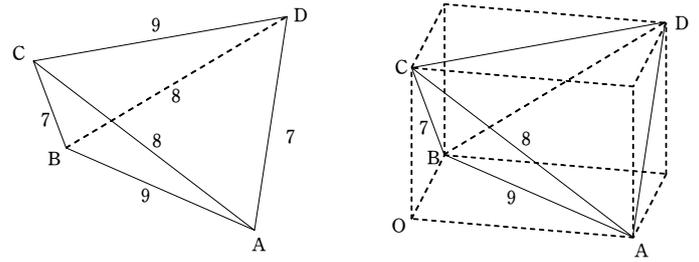
という地獄の計算になります。

等面四面体は直方体から切り出せる

という事実をインストールしておきましょう。

【解答】

題意の等面四面体は直方体から切り出せる。



上の図において、Oを原点として

$A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) とする。

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 81 \dots \textcircled{1} \\ b^2 + c^2 = 49 \dots \textcircled{2} \\ c^2 + a^2 = 64 \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①+②+③ より、 $2(a^2 + b^2 + c^2) = 194$, すなわち

$$a^2 + b^2 + c^2 = 97 \dots \textcircled{4}$$

①, ④ より $97 - c^2 = 81$ だから、 $c^2 = 16$ で $c > 0$ より $c = 4$

②, ④ より $97 - a^2 = 49$ だから、 $a^2 = 48$ で $a > 0$ より $a = 4\sqrt{3}$

③, ④ より $97 - b^2 = 64$ だから、 $b^2 = 33$ で $b > 0$ より $b = \sqrt{33}$

題意の等面四面体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= abc - 4 \times (\text{四面体 OABC の体積}) \\ &= abc - 4 \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times ab \times c \right) \right\} \\ &= abc - \frac{2}{3} abc \\ &= \frac{1}{3} abc \\ &= 16\sqrt{11} \dots \textcircled{\text{答}} \end{aligned}$$

【総括】

一時期、等面四面体が流行った時代がありました。(1990年代)

最近は知識で差がついてしまうことを嫌う傾向にありますから、古典的な話題かもしれません。

とはいえ、いざ出題されると破壊力のある話題なので、一度は経験しておきたい話題ではあります。