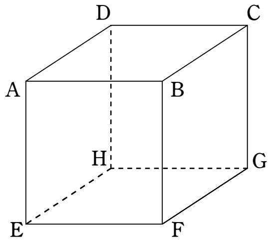
図のような 1 辺の長さ 4 の立方体 ABCD−EFGH がある。

線分 EC と線分 AG の交点を O とし，平面 AEGC 上に点 O を中心とする半径 1 の円を描く。

動点 P がこの円の周上を動くとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ の最大値を求めよ。

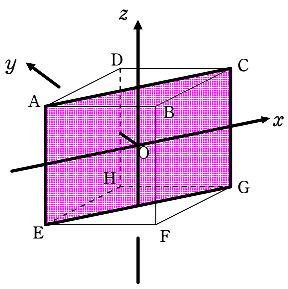
(2) (1) の点 P から面 EFGH に下ろした垂線の長さを求めよ。

＜ '88 信州大 ＞

【戦略】

斜めの平面上の円が扱いにくいので，今回の円を真正面から見る形で設定を考えます。

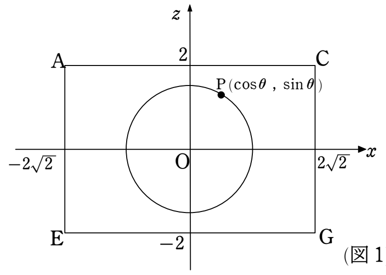
つまり



という設定を考えます。

この設定さえしてしまえば，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$ と簡単に表せますから $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ も θ を用いて表現でき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ が θ の式で立式でき，結局は三角関数の最大最小問題になります。

【解答】



(図 1)

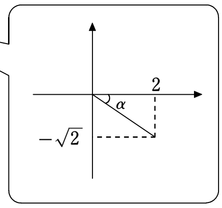
(1) (図 1) のように，O を原点，平面 AEGC を xz 平面 $\mathrm{A}(-2\sqrt{2},\ 0,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2\sqrt{2},\ 2)$ と設定する。

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{2}-\cos\theta\\0\\2-\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta\\0\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos\theta\\2\sqrt{2}\\2-\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}&=(-2\sqrt{2}-\cos\theta)\cdot(-\cos\theta)+0\cdot\sqrt{2}+(2-\sin\theta)^2\\&=5-2(2\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta)\\&=5-2\sqrt{6}\sin(\theta-\alpha)\end{aligned}$$



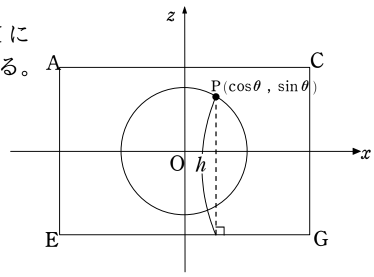
ただし，α は $\begin{cases}0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\\ \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{cases}$ $\cdots(*)$

を満たす

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-\alpha\leqq\theta-\alpha<2\pi-\alpha$ であるので，

$\theta-\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ は最大値 $5+2\sqrt{6}$ をとる。… 答

(2) (1) のとき，P から平面 EFGH に下ろした垂線の長さを h とする。



$$\begin{aligned}h&=(\mathrm{P}\text{ の }z\text{ 座標})-(-2)\\&=\sin\theta+2\end{aligned}$$

$\theta-\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\alpha+\dfrac{3}{2}\pi$

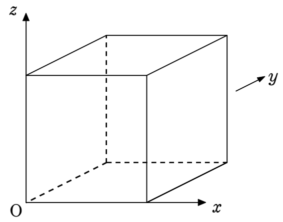
これより，$h=\sin\left(\alpha+\dfrac{3}{2}\pi\right)+2$
$\qquad=-\cos\alpha+2$

$(*)$ より，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ であるから

$h=-\dfrac{2}{\sqrt{6}}+2$ で，整理すると $h=\dfrac{6-\sqrt{6}}{3}$ …答

【総括】

立方体について座標設定しようと思ったら



と辺に沿って座標軸を設定するのが普通ですが，それだと今回の円を式で表すのが困難になります。