相反方程式

x の 4 次方程式

$$x^4+2x^3+ax^2+2x+1=0 \cdots (*)$$

について，次の問いに答えよ。ただし，a は実数の定数とする。

(1) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくとき，$(*)$ を t の方程式として表せ。

(2) $a=3$ のとき，$(*)$ の解を求めよ。

(3) $(*)$ が異なる 4 個の実数解をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

＜ '11 名城大 ＞

【戦略】

係数が左右対称であるような方程式を相反方程式と言い，有名ネタです。

(1) 相反方程式の基本は「真ん中で割れ」というのが常套手段です。

今回は x^2 の項が真ん中なので，両辺 x^2 で割ることを考えます。

ただし，それをするにあたっては，$x=0$ が解とはならないことを確認しておくことが必要です。

$x=0$ が解ではないという前提で

$$x^4+2x^3+ax^2+2x+1=0 \Longleftrightarrow x^2+2x+a+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

という同値性が保証されます。

係数が左右対称であるがゆえに，$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+a=0$

となり，$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくことで，t の 2 次方程式を得ることができます。

もちろん，この後は $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\ (=t^2-2)$ と見ることで

$t^2+2t+a-2=0 \cdots (**)$ という所望の t についての 2 次方程式が得られます。

(2) $a=3$ のとき，$(**)$ は $t^2+2t+1=0$，となり，$t=-1$ (重解) を得ることになります。

欲しいのは $(*)$ を満たす x ですから，t と x の橋渡してある関係式

$x+\dfrac{1}{x}=t$ を用いて，$x+\dfrac{1}{x}=-1$，すなわち $x^2+x+1=0$ を解けばよいことになり，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ を得て，解決です。

(3) (2) の具体例で分かったように，$(*)$ を満たす x は

$(**)$ の解 t が決まる → $x+\dfrac{1}{x}=t$ に代入し，x の 2 次方程式を解く

という流れで求まります。

ただ，$(**)$ を満たす t が「下手くそな t 」だと，$(*)$ が相異なる 4 個の実数解をもってくれません。

どんな t ならよいかですが，まずは $x+\dfrac{1}{x}=t$，すなわち

$x^2-tx+1=0$ を満たす x が 2 個ないといけません。

$(**)$ を満たす t が t_1，t_2 と 2 つあれば

$$x^2-t_1x+1=0 \ \rightarrow\ x=x_1,\ x_2$$

$$x^2-t_2x+1=0 \ \rightarrow\ x=x_3,\ x_4$$

というように，$(*)$ が相異なる 4 個の実数解をもつことが実現可能となりますし，$(*)$ が 4 個の相異なる実数解をもつとしたら，このような構造になっているしかありません。

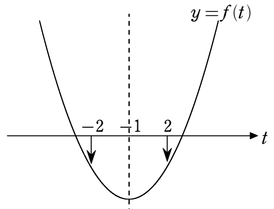
もちろん，t_1，t_2 は下手くそな値だと困ります。

上記のように，$x^2-tx+1=0$ から異なる 2 つの実数解が生まれないといけないわけですから，判別式 D について，$D\geqq 0$ となっていないといけません。

これを処理すると，$t<-2$，$2<t$ となり，t_1，t_2 はこの範囲に存在する必要があるわけです。

これより，$(**)$ を満たす t が $t<-2$，$2<t$ の範囲に 2 個存在すればよいことになり，解の配置問題の処理となります。

$f(t)=t^2+2t+a-2$ とおくと，$y=f(t)$ の軸は $t=-1$ なので



のように，$t<-2$，$2<t$ の範囲で 1 個ずつ解をもつことになります。

【解答】

(1) $(*)$ は $x=0$ を解にもたないことから

$(*)$ を満たす x は，$\dfrac{x^4+2x^3+ax^2+2x+1}{x^2}=0$

すなわち $x^2+2x+a+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ を満たしている。

これは $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+a-2=0$ と変形できる。

$x+\dfrac{1}{x}=t \cdots$ ① とおくとき，$t^2+2t+a-2=0 \cdots (**)$ …答

(2) $a=3$ のとき，$(**)$ は $t^2+2t+1=0$，すなわち $(t+1)^2=0$

つまり，$(**)$ を満たす t は $t=-1$

このとき，① の関係式から得られる $x+\dfrac{1}{x}=-1$ を満たす x が $(*)$ を満たす x である。

よって，$(*)$ の解は $x^2+x+1=0$ の解となり，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ …答

(3)　① を整理すると，$x^2-tx+1=0$ … ①′

これが相異なる 2 つの実数解をもつための条件は ①′ の判別式を D として，$D\geqq 0$

これより，$(-t)^2-4\geqq 0$，すなわち $t<-2,\ 2<t$ … ②

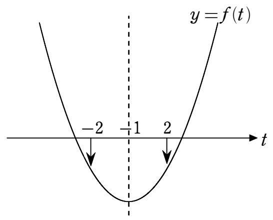
(*) を満たす相異なる x が 4 個存在するための条件は

(**) を満たす t が ② の範囲に 2 個存在することである。

（**※ 補足後述**）

$f(t)=t^2+2t+a-2$ とおく。

$y=f(t)$ の軸が $t=-1$ であることを考えると



$$\begin{cases} f(-2)<0 \\ f(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2<0 \\ a+6<0 \end{cases}$$

すなわち $a<-6$ … 答

※ 補足

(**) を満たす t が $t<-2$，$2<t$ の範囲に t_1，t_2 と 2 つあって

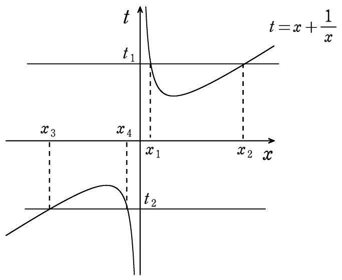
$$x^2-t_1x+1=0 \ \rightarrow\ x=x_1,\ x_2$$

$$x^2-t_2x+1=0 \ \rightarrow\ x=x_3,\ x_4$$

という構造になっていたとしても，この 2 つの 2 次方程式が共通解をもってしまうと，「相異なる 4 つ」という点がまずくなります。

ただ，今回は共通解をもつことはあり得ません。

$t=x+\dfrac{1}{x}$ という対応関係を視覚的に捉えると



ということになり，どれも共通していることはありません。

【総括】

相反方程式は定番の話題であり，そのシナリオについてはある程度自分のものとしている必要があります。

なお，今回のような「偶数次」の相反方程式については「真ん中」がありますが，「奇数次」の相反方程式には真ん中がありません。

Ex

$$x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=0$$

この場合，アタフタする人もいるでしょうが，よく観察してみてください。

係数が左右対称であるがゆえに，

奇数次の相反方程式は必ず $x=-1$ を解にもちます。

このことから，$x+1$ を因数にもつことになります。

そして，$(x+1)\underline{(x^4+x^3+2x^2+x+1)}=0$ と因数分解したあとですが

→ こちら側が偶数次の相反方程式となります。

「真ん中がない」と言って焦らないようにしましょう。

なお，相反方程式の特徴としては

$x=\alpha$ が相反方程式の解であるならば，$x=\dfrac{1}{\alpha}$ も解となる

ということが言えます。

これについては

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+1=0 \ \cdots (☆)$$

と，両端の係数が 1 の場合で検証すれば十分です。

$x=\alpha$ を解にもつとき

$$\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+1=0$$

この α は 0 ではないので，両辺 α^n で割れば，

$$1+\frac{a_1}{\alpha}+\frac{a_2}{\alpha^2}+\cdots\cdots+\frac{a_2}{\alpha^{n-2}}+\frac{a_1}{\alpha^{n-1}}+\frac{1}{\alpha^n}=0$$

これは，(☆) が $x=\dfrac{1}{\alpha}$ を解にもつことを意味します。