α，β，γ は互いに相異なる複素数とする。

(1)　複素数平面上で $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ。

(2)　複素数 z が

$$(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$$

を満たしているとき，z は α，β，γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ。ただし，α，β，γ は同一直線上にはないものとする。

＜ '00 京都大 ＞

【戦略 1】

(1)　**一般に A(α)，B(β)，C(γ) に対して**

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を起点として回転＆ R 倍拡大(縮小) して $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ となったとき

$$(\beta-\gamma)=(\alpha-\gamma)R(\cos\theta+i\sin\theta)$$

誤解を恐れずに言えば
$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ ($\alpha-z$) に「回転＆拡大パーツ」をかけたら
$\overrightarrow{\mathrm{CB}}(\beta-z)$ になったと思ってください。

が成立するという基本事項をインスピレーションします。

複素数の商が何を意味するのかを考えたいときには，

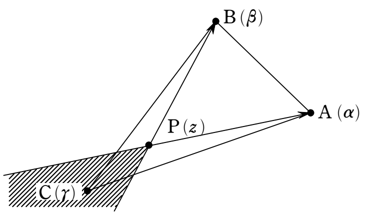
この基本事項から

$\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ **と見れば，**

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の大きさの比率
$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のなす角

などが見えることになります。

(2)　**点 P が三角形 ABC の内部とは**



$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ で張られる「斜交座標」において，C が「第 3 象限」に入っている

と考えるのが分かりやすいでしょうか。

今回は，もう少し明確に P を原点に重ねるために平行移動して考えます。

【解 1】

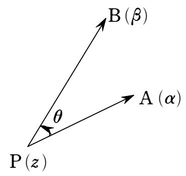
(1)　$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}=\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ なので，$\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ の虚部が正となる条件について考える。

A(α)，B(β)，C(γ) とする。

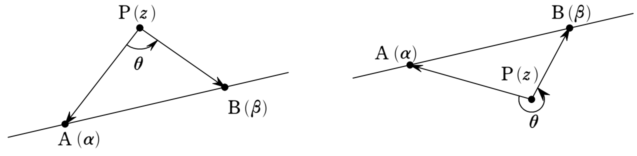
反時計回りの向きを角度の正の方向として，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を θ 回転させ，大きさを R 倍 ($R>0$) に拡大(縮小) して $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ になったとする。

このとき，$\beta-z=(\alpha-z)\cdot R(\cos\theta+i\sin\theta)$

つまり，$\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}=R(\cos\theta+i\sin\theta)$

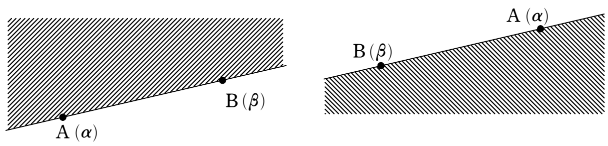


$\dfrac{\beta-z}{\alpha-z}$ の虚部が正とは $0<\theta<\pi$

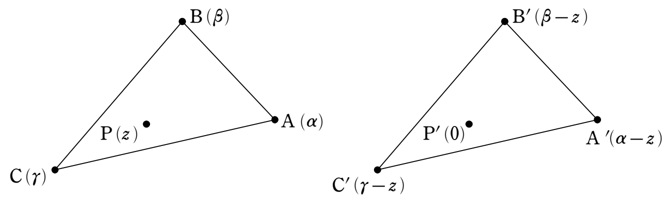


つまり，A から B に向かう進行方向に対して，左手側に P が存在する

よって，P(z) の存在範囲は以下の斜線部 (境界線を含まない)



(2)



P(z)，A(α)，B(β)，C(γ) とする。

P(z) が原点に重なるように平行移動させたとき
A′$(\alpha-z)$，B′$(\beta-z)$，C′$(\gamma-z)$，P′(0) とする。

△A′B′C′ の内部に P′(0) が存在するということを示せばよい。

そのためには，$\gamma-z=s(\alpha-z)+t(\beta-z)$ (s，t は実数) と表したとき，

$$s<0 \text{ かつ } t<0 \cdots (*)$$

であることを示せばよい。

$(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ より

$(z-\gamma)\{(z-\alpha)+(z-\beta)\}=-(z-\alpha)(z-\beta)$

これより，$\gamma-z=\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\alpha)+(z-\beta)}$

$z=\alpha$ と仮定すると，与えられた等式から $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$ ということになり，$\alpha=\beta$，または $\alpha=\gamma$ となるため，α，β，γ が相異なるということに矛盾する。

ゆえに，$z\fallingdotseq\alpha$ であり，同様にして $z\fallingdotseq\beta$，$z\fallingdotseq\gamma$ である。

これより，$\gamma-z=\dfrac{(z-\alpha)(z-\beta)}{(z-\alpha)+(z-\beta)}$ の両辺逆数を考えると

$\dfrac{1}{\gamma-z}=\dfrac{(z-\alpha)+(z-\beta)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$，すなわち $\dfrac{1}{\gamma-z}=\dfrac{1}{z-\alpha}+\dfrac{1}{z-\beta}$ …①

ここで，一般に複素数 w に対して，$|w|^2=w\,\overline{w}$ であるため

$\dfrac{1}{w}=\dfrac{\overline{w}}{|w|^2}$ が言える。

これにより，① は

$$\frac{1}{|\gamma-z|^2}\overline{(\gamma-z)}=\frac{1}{|z-\alpha|^2}\,\overline{(z-\alpha)}+\frac{1}{|z-\beta|^2}\,\overline{(z-\beta)}$$

すなわち $\overline{(\gamma-z)}=\dfrac{|\gamma-z|^2}{|z-\alpha|^2}\,\overline{(z-\alpha)}+\dfrac{|\gamma-z|^2}{|z-\beta|^2}\,\overline{(z-\beta)}$

両辺共役な複素数を考えると

$$\begin{aligned}\gamma-z&=\frac{|\gamma-z|^2}{|z-\alpha|^2}(z-\alpha)+\frac{|\gamma-z|^2}{|z-\beta|^2}(z-\beta)\\&=-\frac{|\gamma-z|^2}{|z-\alpha|^2}(\alpha-z)-\frac{|\gamma-z|^2}{|z-\beta|^2}(\beta-z)\end{aligned}$$

$s=-\dfrac{|\gamma-z|^2}{|z-\alpha|^2}$，$t=-\dfrac{|\gamma-z|^2}{|z-\beta|^2}$ とおくと

$\gamma-z=s(\alpha-z)+t(\beta-z)$ であり，$s<0$，$t<0$ である。

ゆえに，$(*)$ が示されたので，題意は示された。

【戦略 2】(2) について

(1) を誘導と見るのであれば

$$(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$$

の両辺を $(z-\alpha)(z-\beta)$ で割り

$$1+\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+\frac{z-\gamma}{z-\beta}=0$$

と見ると，(1) が活用できそうです。

(1) は虚部について注目するので，両辺の虚部に注目すれば

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\alpha}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right)=0$$

ということになります。(※ 複素数 δ の虚部を $\mathrm{Im}(\delta)$ と表してます。)

これより，$\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}\right)=-\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}\right)$ ということになり，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\alpha}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right) \text{ は異符号} \cdots (☆)$$

ということになります。

次に，与えられた等式を $(z-\beta)(z-\gamma)$ で割って同様に考えれば

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ は異符号} \cdots (★)$$

ということになります。

一般に $u+vi$ に対して，$\dfrac{1}{u+vi}=\dfrac{1}{u^2+v^2}(u-vi)$ ですから

$$\mathrm{Im}(w) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{1}{w}\right) \text{ は異符号}$$

であることを加味すると

$$(☆) \text{ は } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ は同符号}$$

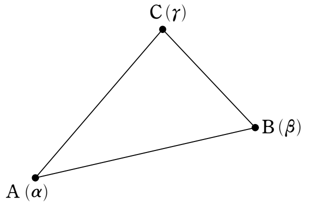
$$(★) \text{ は } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) \text{ は同符号}$$

ということを意味するため

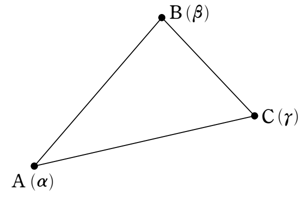
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ は同符号}$$

という結論を得ます。

(1) の結果から，



のときは
$\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}\right)$ と
$\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}\right)$ は全て正の値として
存在することになります



のときは
$\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}\right)$ と
$\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}\right)$ は全て負の値として
存在することになります

【解 2】(2) について

$z=\alpha$ と仮定すると，与えられた等式から $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=0$ ということになり，$\alpha=\beta$，または $\alpha=\gamma$ となるため，α，β，γ が相異なるということに矛盾する。

ゆえに，$z\neq\alpha$ であり，同様にして $z\neq\beta$，$z\neq\gamma$ である。

与えられた等式の両辺を $(z-\alpha)(z-\beta)$ で割ると

$$1+\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+\frac{z-\gamma}{z-\beta}=0$$

両辺の虚部に注目すれば $\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\alpha}\right)+\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right)=0$
(※ 複素数 δ の虚部を $\mathrm{Im}(\delta)$ と表している。)

これにより，$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\alpha}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right)$ は異符号 ⋯ (☆)

一方，与えられた等式を $(z-\beta)(z-\gamma)$ で割ると，同様にして

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ は異符号 ⋯ (★)}$$

ということになる。

一般に $w=u+vi$ $(u>0,\ v>0)$ に対して，

$$\frac{1}{u+vi}=\frac{1}{u^2+v^2}(u-vi)$$

なので，$\mathrm{Im}(w)$ と $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{w}\right)$ は異符号である。

これにより，(☆)，(★) は

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ は同符号}$$

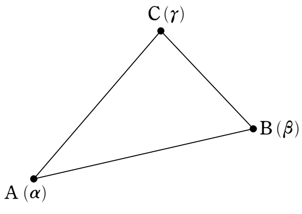
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) \text{ は同符号}$$

ということを意味するため，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right) \text{ と } \mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right) \text{ は同符号 ⋯ }(*)$$

である。

(i)　A(α)，B(β)，C(γ) が反時計回りに配置されているとき



$(*)$ により，$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right)$ は

(i−1)　全て正の値　または　(i−2)　全て負の値

のいずれかであるが，(i−2) のときは，(1) より

z が $\begin{cases} \text{A → B という進行方向に対して右側} \\ \text{B → C という進行方向に対して右側} \\ \text{C → A という進行方向に対して右側} \end{cases}$ の領域に存在すること

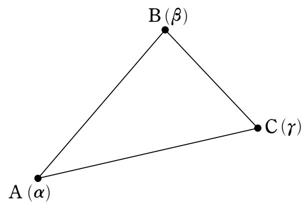
になるが，それは不可能であり，(i−1) が成り立つしかない。

このとき，(1) より

z が $\begin{cases} \text{A → B という進行方向に対して左側} \\ \text{B → C という進行方向に対して左側} \\ \text{C → A という進行方向に対して左側} \end{cases}$ の領域に存在すること

になり，z は三角形 ABC の内部に存在する。

(ii)　A(α)，B(β)，C(γ) が時計回りに配置されているとき



$(*)$ により，$\mathrm{Im}\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\frac{z-\gamma}{z-\beta}\right)$ と $\mathrm{Im}\left(\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\right)$ は

(ii−1)　全て正の値　または　(ii−2)　全て負の値

のいずれかであるが，(ii−1) のときは，(1) より

z が $\begin{cases} \text{A → B という進行方向に対して左側} \\ \text{B → C という進行方向に対して左側} \\ \text{C → A という進行方向に対して左側} \end{cases}$ の領域に存在すること

になるが，それは不可能であり，(ii−2) が成り立つしかない。

このとき，

z が $\begin{cases} \text{A → B という進行方向に対して右側} \\ \text{B → C という進行方向に対して右側} \\ \text{C → A という進行方向に対して右側} \end{cases}$ の領域に存在すること

になり，z は三角形 ABC の内部に存在する。

以上から，z は三角形 ABC の内部に存在する。

【総括】

複素数において，$z=x+yi$ などとおき，xy 座標の話に帰着させるかどうかというのは大きな選択肢です。

$z=x+yi$ などとおくことでねじ伏せることができる問題が多い中，複素数を複素数のまま扱う見方で進めていく本問は，そのスキルを運用する訓練となる機会の一つで，良問です。

なお，対称性という観点から，与えられた等式

$$(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$$

の両辺を $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$ で割ると

$$\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{z-\gamma}=0$$

が得られ，【解 1】でいう ① が得られることになります。

【参考】

ガウス・ルーカスの定理

$f(z)=0$ の解に対応する点を A_i とする。

$f'(z)=0$ の解に対応する点は A_i の凸包に含まれる。

と呼ばれる定理があります。

$f(z)=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
f'(z)&=(z-\alpha)'(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\alpha)(z-\beta)'(z-\gamma)+(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)' \\
&=(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)
\end{aligned}
$$

となり，本問の主張はまさにガウス・ルーカスの定理そのものです。

＜注意＞

凸包とはざっくり言うと，

点をピンだと思って外側から輪ゴムをかけたときにできる図形

だと思ってください。

例えば