

正多面体の色の塗り分け【双対構造の利用】

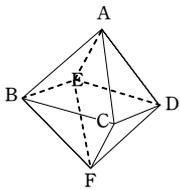
正八面体について考える。ただし、回転させて一致するものは同じものとする。

- (1) 頂点に1, 2, ... と順に番号を付けるとき、番号の付け方は何通りあるか。
- (2) 2つの面を赤に、残り6個の面を白に塗るとき、塗り方は何通りあるか。
- (3) 3つの面を赤に、残り5個の面を白に塗るとき、塗り方は何通りあるか。

< '16 久留米大 >

【戦略】

- (1) 回転による一致を同じものと見なす(円順列)は「誰か一人の眼から見て他がどうなっているか」というのが基本です。



において、例えば1の眼から見て他がどうなっているかを考えるわけで、1はAの位置として考えても問題ありません。

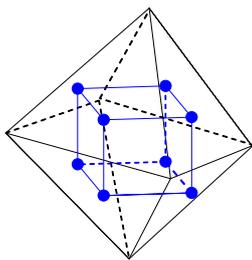
そうすると、 $\left\{ \begin{array}{l} F \text{の番号は5通り} \\ BCDE \text{の付け方は}(4-1)! \text{通り} \end{array} \right.$

と考え、 $5 \cdot (4-1)! = 30$ 【通り】となります。

- (2) 正八面体の面を基準に考えると、どのような回転対称性が発生するかを追いきるのが大変です。

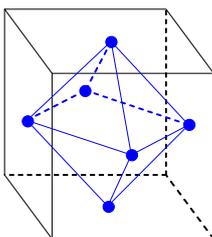
もちろん腕力で押し切ることも可能ですが、ここでは勉強のためにアイデアで解決したいと思います。

正八面体の各面に色を付けるということは立方体の各頂点に色を付けるということと同じです。



というように、正八面体の各面の重心を結んで立方体を構成することが可能だからです。

同様に



というように、立方体の各面の重心(対角線の交点)を結んで立方体を構成することも可能だからです。

つまり、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{正八面体の各面} \longleftrightarrow \text{立方体の各頂点} \\ \text{正八面体の各頂点} \longleftrightarrow \text{立方体の各面} \end{array} \right.$$

と対応します。

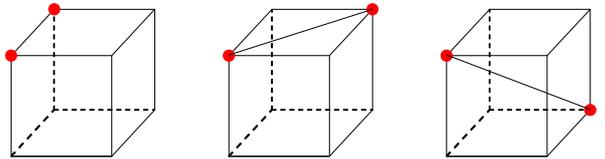
(2), (3) ともに、「立方体の各頂点に色を塗る」という場合で考えても差し支えありません。

(2) は立方体の各頂点に赤を2つ塗るときの塗り方を考えますが要するに

「相対的に見た2点の位置関係」

を追えばいいだけです。

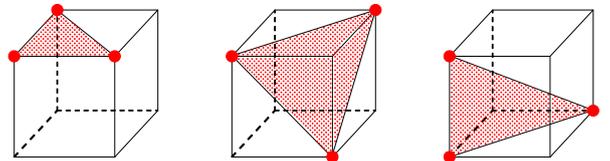
赤の2頂点を結ぶ線分の長さで分類すれば



という3パターンしかありえません。

(3) は「相対的に見た3点の位置関係」を追っていきます。

出来上がる三角形の種類に注目すれば

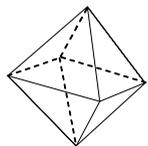


という3パターンしかありません。

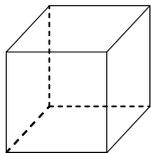
【解答】ではついでに(1)も立方体の面に色を塗る話に戻着させて考えてみます。

【解答】

(1)



正八面体の頂点に番号を付けるということは、



立方体の面に番号を付けることと同じである。

※ 立方体の各面における対角線の交点によって正八面体が構成される。

よって、立方体の各面に1から6の番号をつける付け方を考える。

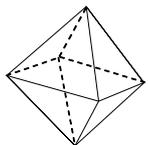
上面を1として固定する。

底面の番号の付け方は5通り。

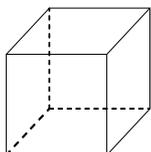
側面の番号の付け方は残り4つの数字を円形に並べる方法と等しく $(4-1)! = 6$ 【通り】

ゆえに、 $5 \cdot 6 = 30$ 【通り】 … 図

(2)



正八面体の各面に色を付けるということは、

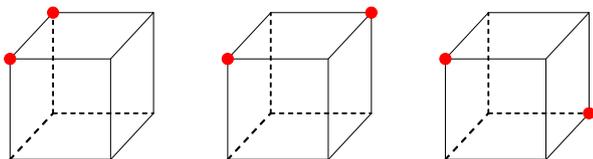


立方体の各頂点に色を付けることと同じである。

※ 正八面体の各面における重心によって立方体が構成される。

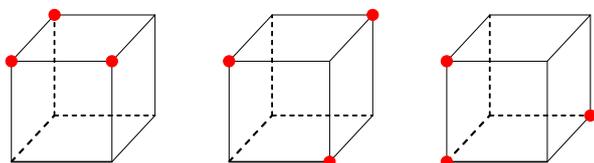
よって、立方体の各頂点に題意のように色を塗る方法を考える。

赤の頂点が2つあり、相対的に見た赤頂点の配置は



の3通り … 図

(3) (2)と同様に考えて、相対的に見た赤頂点の3点の配置は



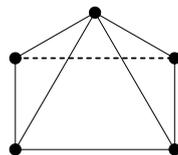
の3通り … 図

【総括】

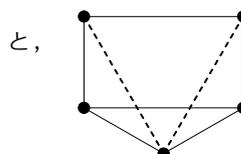
腕力で押し切る方針は、結局は【解答】と同じ趣旨の内容が長々と書かれるだけだと思うので、割愛します。

初見の状態であつた場合、この方針が試験場で舞い降りることは多分ないと思います。

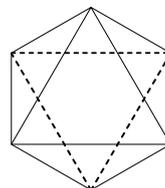
参考までに正八面体のまま考えると



というピラミッド(ピラミッドに見えますか?)

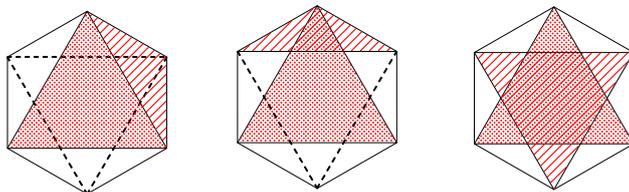


というピラミッドをガッチャンコして



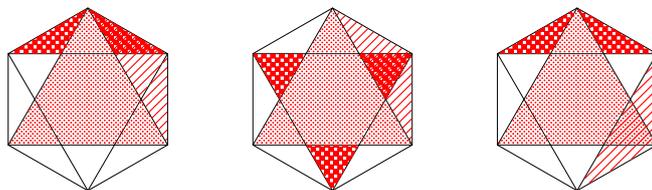
の形で見ると回転対称性が見えるでしょうか。

(2)は



という3パターンです。

(3)は



という3パターンです。

【参考】

正六面体の各面の重心を結べば，正八面体になります。

正八面体の各面の重心を結べば，正六面体になります。

このとき，正六面体と正八面体は「双対 (dual)」と言います。

ちなみに，その他の正多面体については

- ・ 正四面体は自分自身と双対
- ・ 正十二面体と正二十面体は双対

ということが言えます。