平面上に半径1の円 C がある。この平面上で C の外部にある点Pから2つの接線を引き，その接点をそれぞれA，Bとする。

点Pから C と2点で交わるように直線を引き，C との交点をそれぞれQ，Rとし，直線ABとの交点をSとする。線分PQ，PR，PSの長さをそれぞれ r_1，r_2，r とすると，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2}{r}$$

＜ '81 大分医科大 ＞

【戦略】

$\mathrm{P}(p,\ 0)\ (p>1)$，$C: x^2+y^2=1$ と座標を設定して進めていきます。

方針としては P，Q，R，S が乗っている直線 ℓ の式を立式できれば，円 $C: x^2+y^2=1$，直線 AB : $x=\dfrac{1}{p}$（これがパッと見えるためには極と極線についての知識的側面が必要です）との連立方程式を考えて交点をとらえることで話を進めていきます。

$\mathrm{PQ}=r_1$，$\mathrm{PR}=r_2$，$\mathrm{PS}=r$ ということを最大限生かすために，この直線 ℓ をベクトル方程式として表現していきます。

つまり，この直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{d}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\vec{d}$ と表現するわけです。（ℓ 上の点 T を表現しているわけです。）

この $\vec{d}$ については大きさ1がよいので，$\vec{d}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ などと設定します。

これにより，$t=r_1$ とすれば，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が，$t=r_2$ とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が，$t=r$ とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ が得られることになります。

これにより $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=r_1\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=r_2\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=r\vec{d}$

であり，
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_1\cos\theta\\ r_1\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r_1\cos\theta\\ r_1\sin\theta\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_2\cos\theta\\ r_2\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r_2\cos\theta\\ r_2\sin\theta\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}\end{cases}$$

と，Q，R，S の座標を Get できるわけです。

Q，R は $C: x^2+y^2=1$ 上の点でもあるわけなので
$$\begin{cases}(p+r_1\cos\theta)^2+(r_1\sin\theta)^2=1\\ (p+r_2\cos\theta)^2+(r_2\sin\theta)^2=1\end{cases}$$

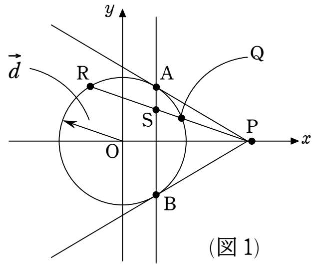
すなわち $\begin{cases}{r_1}^2+(2p\cos\theta)r_1+p^2-1=0\\ {r_2}^2+(2p\cos\theta)r_2+p^2-1=0\end{cases}$ **ということになり，これは**

$$t^2+(2p\cos\theta)t+p^2-1=0$$

の解が r_1，r_2 であることを意味します。

今回の左辺である $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$ は $\dfrac{r_1+r_2}{r_1r_2}$ であるため，解と係数の関係で処理することも目論んだモノの見方です。

【解答】



（図1）

（図1）のように，$\mathrm{P}(p,\ 0)\ (p>1)$，$C: x^2+y^2=1$ と設定して考えても一般性を失わない。

対称性から $\mathrm{A}(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{B}(s_1,\ -t_1)$ と設定できる。

A，B における C の接線の方程式はそれぞれ
$$s_1x+t_1y=1,\ s_1x-t_1y=1$$

これらが $\mathrm{P}(p,\ 0)$ を通るので，$s_1p=1$ を得るため，$s_1=\dfrac{1}{p}$

ゆえに，直線ABは $x=\dfrac{1}{p}$ …①

さて，P，Q，R，S は同一直線上にあり，その直線を ℓ とする。

ℓ の方向ベクトルとして，$\vec{d}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ を考える。

$|\vec{d}|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=r_1\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=r_2\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{PS}}=r\vec{d}$$

であり，
$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_1\cos\theta\\ r_1\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r_1\cos\theta\\ r_1\sin\theta\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r_2\cos\theta\\ r_2\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r_2\cos\theta\\ r_2\sin\theta\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\begin{pmatrix}p\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+r\cos\theta\\ r\sin\theta\end{pmatrix}\end{cases}$$

Q，R は $C: x^2+y^2=1$ 上の点なので
$$\begin{cases}(p+r_1\cos\theta)^2+(r_1\sin\theta)^2=1\\ (p+r_2\cos\theta)^2+(r_2\sin\theta)^2=1\end{cases}$$

これを整理すると

$$\begin{cases}{r_1}^2+(2p\cos\theta)r_1+p^2-1=0\\ {r_2}^2+(2p\cos\theta)r_2+p^2-1=0\end{cases}$$

これより，r_1，r_2 は2次方程式

$$t^2+(2p\cos\theta)t+p^2-1=0$$

の2解であり，解と係数の関係から $\begin{cases}r_1+r_2=-2p\cos\theta\\ r_1r_2=p^2-1\end{cases}$

これより，

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}$$
$$=\frac{-2p\cos\theta}{p^2-1}\cdots ②$$

さて，S は直線 AB 上の点なので，① より $p+r\cos\theta=\dfrac{1}{p}$

これより，$p^2-1=-pr\cos\theta$ を得る。

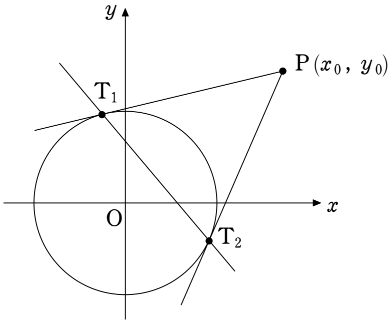
これを ② に代入すれば，

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{-2p\cos\theta}{-pr\cos\theta}$$
$$=\frac{2}{r}$$

となり，題意は示された。

【参考 1】

円外の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から円に引いた 2 本の接線の接点を T_1，T_2 とします。



このとき，直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ をこの円の極線と言い，P を極と言います。

円の方程式が $x^2+y^2=r^2$ のとき $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を極とする極線の方程式は

$$x_0x+y_0y=r^2$$

で与えられます。

接線を作る要領で作れます。
そのせいで逆に接線を作ろうとして意図せず極線を作っている初学者が多く，指導者泣かせな項目です。

（証明）

$\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$ とすると，T_1 における円の接線は

$$s_1x+t_1y=r^2$$

これが $(x_0,\ y_0)$ を通るので $s_1x_0+t_1y_0=r^2$

同様に，$s_2x_0+t_2y_0=r^2$

こっちの流れは普段からよく使う脳みその使い方で分かりやすいですが

こっちの流れはクセがありますね。

この結果は，$\mathrm{T}_1(s_1,\ t_1)$，$\mathrm{T}_2(s_2,\ t_2)$ が直線 $x_0x+y_0y=r^2$ 上にあるということを意味し，それはすなわち，直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ の方程式が

$x_0x+y_0y=r^2$ であることを意味する。

【参考 2】

一般に線分 AB を $m:n$ に $\begin{cases}\text{内分する点を P}\\ \text{外分する点を Q}\end{cases}$ としたとき

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}\ (=m:n)$$

が成立し，このとき，この 4 点 A，B，P，Q は調和点列と言います。

本問の結果より，$\dfrac{r_1+r_2}{r_1r_2}=\dfrac{2}{r}$ であることから，$r(r_1+r_2)=2r_1r_2$

これより，$r_1(r_2-r)=r_2(r-r_1)$，つまり $\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RS}=\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QS}$ を得ます。

これより，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QS}=\mathrm{PR}:\mathrm{RS}$ ということになり，P，Q，R，S は調和点列ということになります。

【総括】

$y=f(x)$ のような形で図形を表現することを「直交座標表示」と言います。

本問は直線 ℓ を直交座標表示ではなく，ベクトル方程式で表現する部分に発想が必要だったと思います。

斜めの距離に対しての威力が伝わったでしょうか。

$\begin{cases}y=f(x)\\ y=g(x)\end{cases}$ という直交座標表示同士の連立については多くの人が慣れていると思いますが，本問で進めたような $\begin{cases}\text{直交座標表示}\\ \text{ベクトル方程式}\end{cases}$ という連立については慣れている人は多くはないでしょう。

直交座標表示もベクトル方程式も結局は

「図形の表現方法の 1 つ」

ということであり，場面場面に応じて使いこなせるようにしておきましょう。

本問はそれなりに有名事実であるため，事実的に糧に出来る部分もありますが，それに加えて「考え方や手法的にも」糧にできる部分があります。