n を 2 以上の整数とする。平面上に，$n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

(A)　$\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1\leqq k\leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k=\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

(B)　線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。

＜ '07 東京大 ＞

【戦略】

絵を描いてみると，出来上がっていく三角形は全て相似であり，最初の三角形のサイズを 1 としたときの相似比は

$$1:1+\frac{1}{n}:\left(1+\frac{1}{n}\right)^2:\cdots\cdots$$

と，サイズが $1+\dfrac{1}{n}$ 倍となっていくことが読み取れます。

このことから，a_1，a_2，… についても公比が $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列であることが読み取れます。

初項については最初の三角形 $\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ で余弦定理を用いて計算すれば

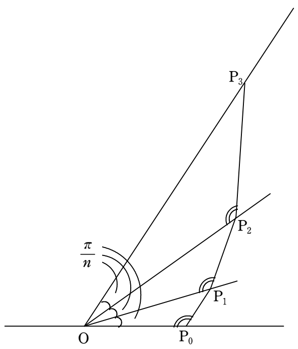
$$a_1=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$$

となります。

s_n は初項 $a_1=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$，公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列の和として処理することになります。

形がイカツイため，置き換えを駆使するなど少しでも目に優しい処理をすることを心掛けたいところです。
（【解答】では $\dfrac{1}{n}=N$ と置き換えて進めます。）

【解答】



条件 (A) より，

$\triangle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k \infty \triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ であり，$\dfrac{\mathrm{OP}_{k+1}}{\mathrm{OP}_k}=\dfrac{\mathrm{OP}_k}{\mathrm{OP}_{k-1}}$

これより，$\dfrac{\mathrm{OP}_k}{\mathrm{OP}_{k-1}}=\dfrac{\mathrm{OP}_{k-1}}{\mathrm{OP}_{k-2}}=\cdots\cdots=\dfrac{\mathrm{OP}_1}{\mathrm{OP}_0}=\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1}=1+\dfrac{1}{n}$ …①

一方，再び $\triangle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k \infty \triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ であるため，

$$\frac{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=\frac{\mathrm{OP}_k}{\mathrm{OP}_{k-1}}\ \cdots②$$

①，② より，$\dfrac{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}=1+\dfrac{1}{n}$

すなわち，$a_{k+1}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)a_k$ であり，数列 a_1，a_2，… は公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列である。

初項 a_1 については $\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ で余弦定理を用いれば

$$a_1{}^2=1^2+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

$a_1>0$ より，$a_1=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$

s_n は初項 $\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}$，公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列の和であるため

$$s_n=\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}$$

$\dfrac{1}{n}=N$ とおくと

$$s_n=\sqrt{1+(1+N)^2-2(1+N)\cos N\pi}\cdot\frac{(1+N)^{\frac{1}{N}}-1}{N}$$

$$=\sqrt{2(1+N)(1-\cos N\pi)+N^2}\cdot\frac{(1+N)^{\frac{1}{N}}-1}{N}$$

$$=\sqrt{2(1+N)\cdot2\sin^2\frac{N\pi}{2}+N^2}\cdot\frac{(1+N)^{\frac{1}{N}}-1}{N}$$

$$=\sqrt{4(1+N)\cdot\frac{\sin^2\frac{N\pi}{2}}{\left(\frac{N\pi}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{N\pi}{2}\right)^2+N^2}\cdot\frac{(1+N)^{\frac{1}{N}}-1}{N}$$

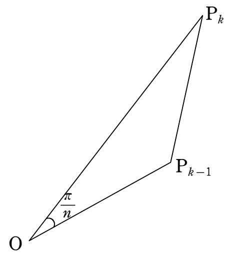
$$=\sqrt{(1+N)N^2\pi^2\cdot\frac{\sin^2\frac{N\pi}{2}}{\left(\frac{N\pi}{2}\right)^2}+N^2}\cdot\frac{(1+N)^{\frac{1}{N}}-1}{N}$$

$$=\sqrt{(1+N)\pi^2\cdot\frac{\sin^2\frac{N\pi}{2}}{\left(\frac{N\pi}{2}\right)^2}+1}\cdot\left\{(1+N)^{\frac{1}{N}}-1\right\}$$

$n\to\infty$ のとき $N\to0$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\sqrt{\pi^2+1}\,(e-1)\ \cdots 答$$

【総括】



P_k の座標を極座標で表すと，$OP_k=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$，偏角は $\frac{\pi}{n}\cdot k=\frac{k\pi}{n}$ より

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k,\ \frac{k\pi}{n}\right)$$

です。

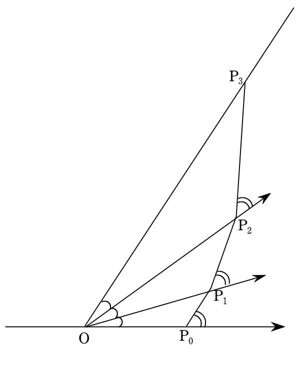
つまり，極座標におけるパラメータ表示 $\begin{cases} r=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \\ \theta=\frac{k\pi}{n} \end{cases}$ として与えられます。

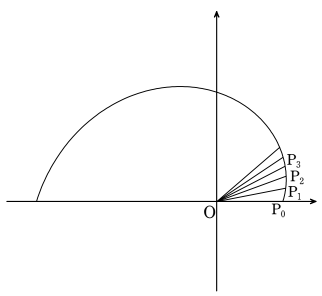
ここから，k を消去し，$r=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n\theta}{\pi}}$

$n\to\infty$ とすると，$r=e^{\frac{\theta}{\pi}}$ となります。

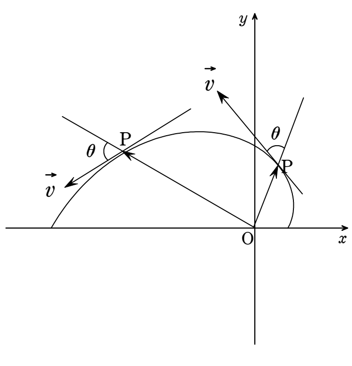
直交座標表示によるパラメータ表示で表現すれば，$\begin{cases} x=e^{\frac{\theta}{\pi}}\cos\theta \\ y=e^{\frac{\theta}{\pi}}\sin\theta \end{cases}$ です。

このことから，本問で $n\to\infty$ としたときのおおよそのイメージは
「等角螺旋」を表すことになります。





等角螺旋の性質である



「位置ベクトルと速度ベクトルのなす角が一定である」
ということも踏まえると
本問の三角形の連鎖は，
この等角螺旋をある意味
「直線的に近似したもの」
と言えましょう。