$a>0$ を定数として，座標平面上で次の式

$$x(t)=e^{at}\cos t,\ y(t)=e^{at}\sin t\quad(-\infty<t<\infty)$$

で定まる曲線を C_a とする。次の問いに答えよ。

(1) 位置ベクトル $(x(t),\ y(t))$ と速度ベクトル $(x'(t),\ y'(t))$ のなす角 θ は時刻 t によらず一定であることを示し，θ と a の関係を求めよ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となる a に対し，曲線 C_a の $0\leqq t\leqq 2\pi$ に対応する部分の長さを求めよ。

＜ '00 神戸大 ＞

【戦略】

(1) **時刻 t による動点 P $(x(t),\ y(t))$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角が θ です。**

なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|\cos\theta$ が成り立ちます。

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}$ と見て，この値が時刻 t によらない一定値であることを目指せばよいことになります。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ **であることから，(1) の関係式を用いれば a が特定されます。**

求める長さを L とすれば，$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\vec{v}|\,dt$ なので，あとは愚直に計算していくのみです。

【解答】

(1) $x'(t)=ae^{at}\cos t-e^{at}\sin t$ ， $y'(t)=ae^{at}\sin t+e^{at}\cos t$

$\quad=e^{at}(a\cos t-\sin t)$ $\qquad\qquad=e^{at}(\cos t+a\sin t)$

$\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ と $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ のなす角 θ が t によらない一定値であることを示す。

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{e^{2at}\cos^2 t+e^{2at}\sin^2 t}=\sqrt{e^{2at}}=|e^{at}|=e^{at}$$

$$\begin{aligned}|\vec{v}|&=\sqrt{e^{2at}(a\cos t-\sin t)^2+e^{2at}(\cos t+a\sin t)^2}\\&=e^{at}\sqrt{a^2+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}&=x(t)x'(t)+y(t)y'(t)\\&=e^{at}\cos t\cdot e^{at}(a\cos t-\sin t)+e^{at}\sin t\cdot e^{at}(\cos t+a\sin t)\\&=e^{2at}\{a\cos^2 t-\sin t\cos t+\sin t\cos t+a\sin^2 t\}\\&=ae^{2at}\end{aligned}$$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}$ なので，

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{ae^{2at}}{e^{at}\cdot e^{at}\sqrt{a^2+1}}\\&=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\end{aligned}$$

となり，θ は時刻 t によらない一定値である。

また，θ と a の関係は $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ …答

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，すなわち $\dfrac{1}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

これより，$\dfrac{1}{4}=\dfrac{a^2}{a^2+1}$ であり，$a>0$ を考えると $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。

求める長さを L とすると，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}|\vec{v}|\,dt\\&=\sqrt{a^2+1}\int_0^{2\pi}e^{at}\,dt\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t}\,dt\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t}\right]_0^{2\pi}\\&=2\left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}-1\right)\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

今回の $\begin{cases} x=e^{at}\cos t \\ y=e^{at}\sin t \end{cases}$ というパラメータ表示された曲線は「等角螺旋」と呼ばれる有名曲線です。

本問 (1) で示した性質が名前の由来です。

なお，(2) は $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のときと指定して，a が特定されましたが，一般論として，$0\leqq t\leqq 2\pi$ に対応する長さ L は

$$\begin{aligned} L&=\int_0^{2\pi}\left|\vec{v}\right|dt \\ &=\sqrt{a^2+1}\int_0^{2\pi}e^{at}\,dt \\ &=\sqrt{a^2+1}\left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_0^{2\pi} \\ &=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\left(e^{2\pi a}-1\right) \end{aligned}$$

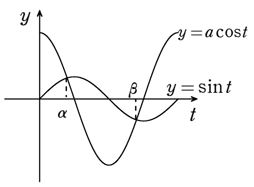
と求めることができます。

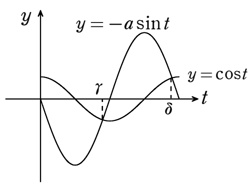
【概形図】

大雑把ですが，$0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲で $\begin{cases} x=e^{at}\cos t \\ y=e^{at}\sin t \end{cases}$ の概形を描いてみます。

$$\begin{aligned} x'(t)&=ae^{at}\cos t-e^{at}\sin t \\ &=e^{at}(a\cos t-\sin t) \end{aligned}\quad ,\quad \begin{aligned} y'(t)&=ae^{at}\sin t+e^{at}\cos t \\ &=e^{at}(\cos t+a\sin t) \\ &=e^{at}\{\cos t-(-a\sin t)\} \end{aligned}$$

ですから

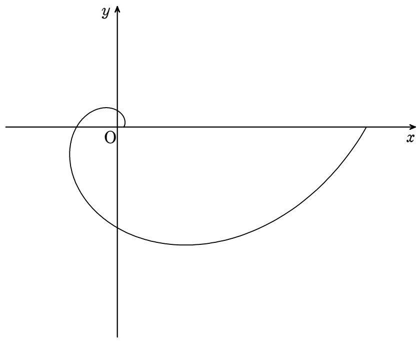




とグラフの上下で $x'(t)$，$y'(t)$ の符号を判定して増減表を書くと

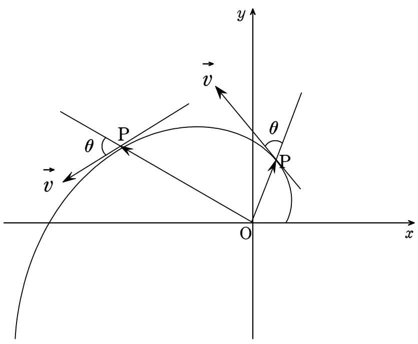
t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	γ	$\cdots$	β	$\cdots$	δ	$\cdots$	2π
$x'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(t)$	→	→	·	←	←	←	·	→	→	→	→
$y'(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$y(t)$	↑	↑	↑	↑	·	↓	↓	↓	·	↑	↑
$\vec{v}$	↗	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↗

グラフの概形は



といったようになります。

もう少し拡大してみると



のように，時刻 t における位置ベクトル $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ と，速度ベクトル $\vec{v}$ のなす角は時刻 t によらず一定値となります。

なお，等角螺旋 $\begin{cases} x=e^{at}\cos t \\ y=e^{at}\sin t \end{cases}$ を極方程式で表すと

$$r=e^{at}$$

と表現できます。

一般に，$r=f(\theta)$ という極座標表示された曲線の $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ の範囲に対応する部分の長さ L は

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} L&=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cos\theta-r\sin\theta\right\}^2+\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\sin\theta+r\cos\theta\right\}^2}\,d\theta \\ &=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta \\ &=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(\theta)\}^2+\{f(\theta)\}^2}\,d\theta \end{aligned}$$

であることも確認しておきましょう。