有名曲線【カテナリー（懸垂線）】

xy 平面上の曲線 $C : y=f(x)$ に関し，以下の問いに答えよ。ただし

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

である。

(1) $f(x)$ は以下の関係式を満たすことを示せ。

(i) $\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=1$

(ii) $f''(x)=f(x)$

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(a\,,\,f(a))$ と点 $\mathrm{B}(0\,,\,f(0))$ の間の曲線の長さ L を求めよ。ただし，a は $a\geqq 0$ を満たす定数である。

(3) 点 A のおける曲線 C の接線上に点 $\mathrm{P}(X\,,\,Y)$ を AP の距離が L に等しくなるようにとる。ただし，$X\leqq a$ とする。
このとき，X および Y を，a を用いて表せ。

(4) 点 A を動かしたときに点 P の描く曲線を D とする。
$a>0$ のとき，曲線 C の点 A における接線と，曲線 D の点 P における接線は常に直交することを示せ。

＜ '17 名古屋市立大 ＞

【戦略】

(1) **証明というよりも，「確認」に近いレベルです。**

(2) $y=f(x)$ $(p\leqq x\leqq q)$ **の部分の長さは** $\displaystyle\int_p^q\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ **です。**

(1) **の関係式が** $\sqrt{\quad}$ **を外すのに貢献します。**

(3) **点 A から，接線方向に長さ L だけ進めた点が P です。**

方向と長さを準備して座標を求める流れをイメージできれば
ベクトルを繋いで座標を Get する流れが自然と思い浮かぶはずです。
(ただ，ある程度演習経験が必要な部分はあります。)

計算を進める上では $\dfrac{e^a+e^{-a}}{2}$ **として計算するのではなく，**
「f のまま計算を進める」という工夫をしたいところです。

これは「カテナリー」という有名曲線の式的特徴を活かした工夫であり，今後の糧としたい工夫です。

(4) **曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(a\,,\,f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ であり問題はないでしょう。**

問題は (3) **で得たパラメータ表示された曲線** D：$\begin{cases} x=a-\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} \\ y=\dfrac{2}{e^a+e^{-a}} \end{cases}$

の接線についてです。

パラメータ表示された曲線に対する $\dfrac{dy}{dx}$ **(接線の傾きに迫る式) を Get するために**

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}}$ **と見ることはパラメータ曲線の扱いの基本です。**

【解答】

(1) $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ であることから

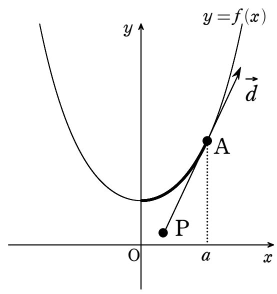
$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\&=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\&=1\end{aligned}$$

また，$f''(x)=\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x)$

よって，(i)，(ii) の等式が成り立つことが示された。

(2)
$$\begin{aligned}L&=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\\&=\int_0^a\sqrt{\{f(x)\}^2}\,dx\ (\because (1)\text{の}(\mathrm{i}))\\&=\int_0^a f(x)\,dx\ \ (\because f(x)>0)\\&=\int_0^a\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_0^a\\&=\frac{e^a-e^{-a}}{2}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3) 点 $\mathrm{A}(a\,,\,f(a))$ における接線の方向ベクトルを $\vec{d}$ とすると



$\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}$ と表現される。

$$\begin{aligned}|\vec{d}|&=\sqrt{1+\{f'(a)\}^2}\\&=\sqrt{\{f(a)\}^2}\ (\because (1)\text{の}(\mathrm{i}))\\&=f(a)\ (\because f(a)>0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\left(\frac{1}{|\vec{d}|}\times(-\vec{d})\right)\times L\quad(\because\ \text{条件 } X\leqq a \text{ より P は A よりも左側})\\&=-\frac{L}{f(a)}\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}\\&=-\frac{f'(a)}{f(a)}\begin{pmatrix}1\\f'(a)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-\dfrac{f'(a)}{f(a)}\\-\dfrac{\{f'(a)\}^2}{f(a)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\begin{pmatrix}a\\f(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\dfrac{f'(a)}{f(a)}\\-\dfrac{\{f'(a)\}^2}{f(a)}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a-\dfrac{f'(a)}{f(a)}\\f(a)-\dfrac{\{f'(a)\}^2}{f(a)}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a-\dfrac{f'(a)}{f(a)}\\\dfrac{\{f(a)\}^2-\{f'(a)\}^2}{f(a)}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで，(1) の (i) より $\{f(a)\}^2-\{f'(a)\}^2=1$ であるため

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} a-\dfrac{f'(a)}{f(a)} \\ \dfrac{1}{f(a)} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a-\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} \\ \dfrac{2}{e^a+e^{-a}} \end{pmatrix}$$

ゆえに，$\begin{cases} X=a-\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} \\ Y=\dfrac{2}{e^a+e^{-a}} \end{cases}$ …答

(4)　曲線 C 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$ …①

一方，$\begin{cases} x=a-\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}} \\ y=\dfrac{2}{e^a+e^{-a}} \end{cases}$ というパラメータ表示された曲線 D について

$$\begin{aligned}\frac{dx}{da}&=1-\frac{f''(a)f(a)-\{f'(a)\}^2}{\{f(a)\}^2}\\ &=1-\frac{\{f(a)\}^2-\{f'(a)\}^2}{\{f(a)\}^2}\quad (\because\ (1)\text{ の (ii)})\\ &=\frac{\{f'(a)\}^2}{\{f(a)\}^2}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{da}=-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$$

ゆえに

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{da}}{\dfrac{dx}{da}}$$

$$=\frac{-\dfrac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}}{\dfrac{\{f'(a)\}^2}{\{f(a)\}^2}}$$

$$=-\frac{1}{f'(a)}$$

したがって，曲線 D 上の点 $\mathrm{P}\left(a-\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}, \dfrac{2}{e^a+e^{-a}}\right)$ における接線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ …②

$\mathrm{A}(a, f(a))$ のとき，$\mathrm{P}\left(a-\dfrac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}, \dfrac{2}{e^a+e^{-a}}\right)$ であり，
①，② からそれぞれの点における接線の傾きの積は -1 となり
直交する。

【総括】

カテナリーにおいては，弧長や面積などの各種図形量を計算する際に

$$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=1$$
$$f''(x)=f(x)$$

といった本問 (1) で示した内容が効いてくるため，出来る限り「f のまま計算する」ことで計算量を抑える工夫をすることを心掛けてください。