$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ とする。$a>0$ とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,f(a))$ における接線が原点を通るものとする。

また，$y=f(x)$，直線 $x=a$，x 軸，および y 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) $a>1$ であることを示せ。

(2) $a^2+f(a)^2=a^2f(a)^2$ であることを示せ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

＜ '16 金沢大 ＞

【戦略 1】～とりあえず泥臭く進める方針～

(1) **ドストレートに $\mathrm{P}(a,f(a))$ における接線の式を立てて，それが $(0,0)$ を通っているということを立式していきます。**

これにより，$(1-a)e^{a}+(1+a)e^{-a}=0$ という式を Get できます。

これを満たす a の値が 1 より大きいことを示せばよいわけですが，工夫せずに腕力で押し切るならば $g(x)=(1-x)e^{x}+(1+x)e^{-x}$ とでもおいて，$g(x)=0$ の正の解が $x>1$ の範囲に存在することを示せばよいでしょう。

(2) **単純に代入しても成り立つ様子が見えません。**

それもそのはずで，a という文字を用いているものの，その正体は具体的な「値」です。(口で言えないから文字で表現しているだけ)

この値は $(1-a)e^{a}+(1+a)e^{-a}=0$ を満たしているような a です。

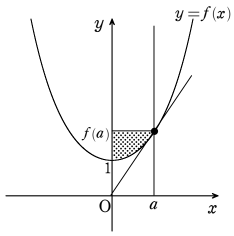
つまり，「条件付きの等式証明」ということが言えます。

この条件をどのように使うかですが，分かりやすいのは指数部分を裸の a のみで表すことができることに注目する方針でしょうか。

要するに $(1-a)e^{a}+(1+a)e^{-a}=0$ を $e^{2a}=\dfrac{a+1}{a-1}$ と変形して e^{2a} を消去 (この表現が適切かはおいておきます) していく方針です。

ここからは手なりに証明できるはずです。

(3)



と図示します。
(ガッツリ微分に頼らずとも，$x>0$ の範囲で単調増加＆偶関数であることを考えれば概形ぐらいは描けます。)

そうなると，円柱から打点部の y 軸回転体の体積 V_1 を除いたものが今回求める回転体の体積であることが分かります。

V_1 を計算する際の工夫は経験に基づく部分が大きいので，【解答】の中に注釈を入れる形で頭の動かし方を記載していきます。

【解 1】

(1) $f'(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ より，$\left(a,\ \dfrac{e^{a}+e^{-a}}{2}\right)$ における接線の式は

$$y=\frac{e^{a}-e^{-a}}{2}(x-a)+\frac{e^{a}+e^{-a}}{2}$$

これが $(0,0)$ を通るので，$0=\dfrac{-a}{2}(e^{a}-e^{-a})+\dfrac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})$

これを整理すると，$(1-a)e^{a}+(1+a)e^{-a}=0$ …①

$g(x)=(1-x)e^{x}+(1+x)e^{-x}$ とおく。

$g(-x)=g(x)$ であり，$g(x)$ が偶関数であることに注意すると $x>0$ の範囲において考えれば十分である。

$x>0$ の範囲で $g(x)=0$ が解をもてば，その解は $x>1$ を満たしているということを示せばよい。

$$\begin{aligned}g'(x)&=-e^{x}+(1-x)e^{x}+e^{-x}-(1+x)e^{-x}\\&=-x(e^{x}+e^{-x})\\&<0\quad(\because\ x>0,\ e^{x}+e^{-x}>0)\end{aligned}$$

なので，$x>0$ の範囲では $g(x)$ は単調減少。

$g(1)=\dfrac{2}{e^{x}}(>0)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ なので，

$x>0$ の範囲で $g(x)=0$ は解をもち，その解は $x>1$ を満たしている。

今，$a>0$ かつ $g(a)=0$ を満たしているので，この a は $a>1$ を満たす。

(2) この a は①を満たしており，$(a+1)e^{-a}=(a-1)e^{a}$，すなわち

$$\frac{a+1}{e^{a}}=(a-1)e^{a}$$

を満たしている。

これより，$e^{2a}=\dfrac{a+1}{a-1}$ を得る。

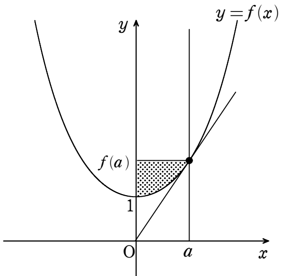
このとき

$$\begin{aligned}a^2+f(a)^2&=a^2+\frac{1}{4}\left(e^{2a}+\frac{1}{e^{2a}}+2\right)\\&=a^2+\frac{1}{4}\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}+2\right)\\&=a^2+\frac{1}{4}\cdot\frac{4a^2}{(a-1)(a+1)}\\&=\frac{a^4}{a^2-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^2f(a)^2&=a^2\cdot\frac{1}{4}\left(e^{2a}+\frac{1}{e^{2a}}+2\right)\\&=a^2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}+2\right)\\&=a^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4a^2}{(a-1)(a+1)}\\&=\frac{a^4}{a^2-1}\end{aligned}$$

よって，$a^2+f(a)^2=a^2f(a)^2$ が成立する。

(3)



(図1)

求める体積を V，(図1)の打点部の
y 軸回転体の体積を V_1 とする。

$$V_1=\int_1^{f(a)}\pi x^2\,dy$$

まずは「普通に」立式します。

$$=\pi\int_0^a x^2\frac{dy}{dx}\,dx$$

x を y の式に直すのが難しいので，dy を dx に直します。

$$=\pi\int_0^a x^2 f'(x)\,dx$$

部分積分が目に付く形です。

$$=\pi\left\{\Big[x^2f(x)\Big]_0^a-\int_0^a 2xf(x)\,dx\right\}$$

$$=\pi\left\{a^2f(a)-2\int_0^a xf(x)\,dx\right\}$$

$$=\pi a^2f(a)-2\pi\int_0^a xf(x)\,dx$$

ここに円柱の体積がいることに目を付けます。

V は底面積 πa^2，高さ $f(a)$ の円柱の体積から V_1 を除いたものである。

$$V=\pi a^2f(a)-V_1$$

$$=\pi a^2f(a)-\left\{\pi a^2f(a)-2\pi\int_0^a xf(x)\,dx\right\}$$

$$=2\pi\int_0^a xf(x)\,dx$$

カテナリーならではの式的特徴を活かします

$f(x)=f''(x)$ であることに注意すると

$$V=2\pi\int_0^a x\{f'(x)\}'\,dx$$

$$=2\pi\left\{\Big[xf'(x)\Big]_0^a-\int_0^a f'(x)\,dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{af'(a)-\Big[f(x)\Big]_0^a\right\}$$

$$=2\pi\left\{a\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{2}-f(a)+f(0)\right\}$$

$$=2\pi\left\{a\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{2}-\frac{e^a+e^{-a}}{2}+1\right\}$$

$$=2\pi\left\{\frac{(a-1)e^a-(a+1)e^{-a}}{2}+1\right\}$$

(1)の ① より，$(1-a)e^a+(1+a)e^{-a}=0$，すなわち

$$(a-1)e^a-(a+1)e^{-a}=0$$

なので

$$V=2\pi\ \cdots\text{答}$$

【戦略2】(1)について 〜方針のみ〜

【解1】(2)で $e^{2a}=\dfrac{a+1}{a-1}$ という式を見て気が付くかもしれませんが左辺は正の値で，$a>0$ であることを考えると右辺の分母が正の値となる必要があるため，$a>1$ であることになります。

（**もっとダイレクトに $a-1=\dfrac{a+1}{e^{2a}}$ と見ても良いでしょう。**）

【戦略3】労力を減らす工夫

(1) $(a, f(a))$ **における接線が原点を通っていることを**

$$\frac{f(a)}{a}=f'(a)$$

と見てやると， $\dfrac{e^a+e^{-a}}{2a}=\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}$ **となります。**

$\dfrac{e^a+e^{-a}}{a}=e^a-e^{-a}$ **ですから，**

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}&=\frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}\\&=\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\\&<1\end{aligned}$$

で，$a>0$ であるため，$a>1$ を得ます。

(2) $\dfrac{f(a)}{a}=f'(a)$ **であることを利用すれば**

$$\begin{aligned}a^2+f(a)^2&=a^2+\{af'(a)\}^2\\&=a^2\{1+f'(a)^2\}\\&=a^2f(a)^2\quad(\because\ \text{カテナリー特有の性質 }1+f'(x)^2=f(x)^2)\end{aligned}$$

となります。

本問は証明問題であるため，カテナリー特有の性質で片づけることなく，計算によってきちんと示そうと思います。

(3) **【解1】の** $V=2\pi\left\{af'(a)-\Big[f(x)\Big]_0^a\right\}$ **を得る部分までは同じです。**

ここからやはり $\dfrac{f(a)}{a}=f'(a)$，**すなわち** $af'(a)=f(a)$ **に注目し**

$$\begin{aligned}V&=2\pi\{f(a)-(f(a)-f(0))\}\\&=2\pi f(0)\\&=2\pi\end{aligned}$$

とすれば，少しはスマートにまとまります。

【解 2】

(1)　$\mathrm{P}(a\,,\,f(a))$ における接線が原点を通っていることから

$$\frac{f(a)}{a}=f'(a),\ \text{すなわち}\ af'(a)=f(a)\ \cdots(*)$$

これより，$\dfrac{e^a+e^{-a}}{2a}=\dfrac{e^a-e^{-a}}{2}$ となり，$\dfrac{e^a+e^{-a}}{a}=e^a-e^{-a}$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}&=\frac{e^a-e^{-a}}{e^a+e^{-a}}\\&=\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\\&<1\end{aligned}$$

条件から $a>0$ なので，$a>1$ を得る。

(2)

$$\begin{aligned}a^2+f(a)^2&=a^2+\{af'(a)\}^2\quad(\because(*))\\&=a^2\{1+f'(a)^2\}\\&=a^2\left\{1+\left(\frac{e^a-e^{-a}}{2}\right)^2\right\}\\&=a^2\left\{1+\frac{e^{2a}+e^{-2a}-2}{4}\right\}\\&=a^2\,\frac{e^{2a}+e^{-2a}+2}{4}\\&=a^2\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2\\&=a^2f(a)^2\end{aligned}$$

となり，$a^2+f(a)^2=a^2f(a)^2$ が成立する。

(3)　**【解 1】の $V=2\pi\left\{af'(a)-\Big[f(x)\Big]_0^a\right\}$ を得る部分までは同じ**

$(*)$ より

$$\begin{aligned}V&=2\pi\{f(a)-(f(a)-f(0))\}\\&=2\pi f(0)\\&=2\pi\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【総括】

初見であれば，泥臭く押し切る【解 1】のような路線でも構いません。

計算上の工夫について，【解 2】の路線は今後の糧にできればよしでしょう。